PAUL LORENZEN

METAMATEMATICA

TECNOS

Paul Lorenzen

METAMATEMATICA

EDITORIAL TECNOS

METAMATEMATICA

La reflexión en torno a los fundamentos y naturaleza última del conocimiento matemático constituye uno de los capítulos más interesantes del pensamiento filosófico de todos los tiempos y, muy especialmente, del pensamiento filosófico-científico de nuestro siglo. Desde su definición por HILBERT como "teoría de la estructura formal de las teorías matemáticas", la *metamatemática* se ha revelado como uno de los campos de investigación más acusados del moderno pensamiento lógico-matemático, de cuya potencia y rendimiento —a partir del espectacular desarrollo del mismo, hecho posible por la obra de autores como FREGE, RUSSELL o PEANO— viene a ser una muestra ejemplar.

En el presente volumen, el profesor de la Universidad de Erlangen, Paul LORENZEN —cuya figura se dibuja en estos momentos como foco de una de las corrientes filosóficas más vivas de la Alemania de la posguerra—, ofrece, desde planteamientos muy rigurosos y originales, una introducción a los tópicos más sobresalientes de esta disciplina. Los problemas de que se ocupa, desde la interpretación de las partículas lógicas a la decibilidad de las teorías axiomáticas, son

240
forcadela
220842

Serie de FILOSOFIA Y ENSAYO
de EDITORIAL TECNOS

ABELLÁN, José Luis: *Miguel de Unamuno a la luz de la psicología.* Una interpretación de Unamuno, desde la psicología individual.
ABELLÁN, José Luis: *Ortega y Gasset en la filosofía española.* Ensayos de apreciación.
DÍAZ, Elías: *Revisión de Unamuno.* Análisis crítico de su pensamiento político.
DOPP, Joseph: *Nociones de lógica formal.*
ENJUTO BERNAL, Jorge: *La filosofía de Alfred North Whitehead.*
FERNÁNDEZ DE CASTILLEJO, José Luis: *Actualidad y participación.* Una filosofía contemporánea.
GARCÍA SAN MIGUEL, Luis: *Notas para una crítica de la razón jurídica.*
GURMÉNDEZ, Carlos: *Ser para no ser.* Ensayo de una dialéctica subjetiva.
HIERRO, José S.-P.: *Problemas del análisis del lenguaje moral.*
HUGHES, John B.: *José Cadalso y las «Cartas Marruecas».*
MARTÍN SANTOS, Luis, y otros: *Ensayos de filosofía de la ciencia.* Simposio de Burgos. En torno a la obra de Karl R. Popper.
MATES, Benson: *Lógica matemática elemental.* Reimpresión.
NICOL, Eduardo: *El problema de la filosofía hispánica.*
NICOL, Eduardo: *Historicismo y existencialismo* (2.ª ed.).
PARÍS, Carlos: *Hombre y naturaleza.*
RAMA, Carlos M.: *Teoría de la historia.* Introducción a los estudios históricos (2.ª ed.).
RODRÍGUEZ PANIAGUA, José M.ª: *Hacia una concepción amplia del Derecho natural.*
SÁNCHEZ DE LA TORRE, Angel: *Los griegos y el Derecho natural.*
SOTELO, Ignacio: *Sartre y la razón dialéctica.*
TIERNO GALVÁN, Enrique: *Acotaciones a la historia de la cultura occidental en la Edad Moderna.*
TIERNO GALVÁN, Enrique: *Razón mecánica y razón dialéctica.*

METAMATEMATICA

PAUL LORENZEN

METAMATEMATICA

EDITORIAL TECNOS
MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
METAMATHEMATIK
publicada por BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT, Mannheim,
© Bibliographisches Institut AG, Mannheim 1962
son propiedad de
EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción de la 2.ª edición alemana por
JACOBO MUÑOZ

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1971
O'Donnell, 27 - Tel. 226 29 23 - Madrid - 9
Printed in Spain. Impreso en España. Depósito legal: M. 10.704 - 1971

Imprenta MINUESA Ronda de Toledo, 24 MADRID-5

INDICE

INDICE DE SÍMBOLOS ..... *Pág.* 8

INTRODUCCIÓN 9

I. FORMALIZACIÓN DE LA LÓGICA 20
§ 1. Lógica clásica de yuntores 20
§ 2. Lógica constructiva de yuntores y cuantificadores 24
§ 3. Lógica clásica de cuantificadores 42
§ 4. Lógica de la igualdad 51

II. FORMALIZACIÓN DE LA ARITMÉTICA 63
§ 5. Aritmética constructiva y axiomática 63
§ 6. Formalización de la aritmética clásica 77
§ 7. Consistencia de la aritmética clásica 92

III. ARITMETIZACIÓN DE LOS FORMALISMOS 105
§ 8. Formalismos completos 105
§ 9. Decibilidad 119
§ 10. Expresabilidad aritmética 130
§ 11. Representabilidad aritmética 140
§ 12. Indecibilidad e incompletitud 151

IV. DECIBILIDAD DE LAS TEORÍAS AXIOMÁTICAS 165
§ 13. Teorías axiomáticas 165
§ 14. Teorías axiomáticas indecidibles 172
§ 15. Teorías axiomáticas completas 183

BIBLIOGRAFÍA 203
INDICE DE NOMBRES 205
INDICE DE MATERIAS 206

INDICE DE SIMBOLOS

Lógica

$\vee$ 21, 32, 78, 106
$\wedge$ 21, 32, 78, 106
$\neg$ 21, 31, 78, 106
$\wedge$ 21, 27, 78, 106
$\vee$ 21, 27, 78, 106
$\prec$ 23, 77
$\nprec$ 23
$\rightarrow$ 23, 30
$\leftrightarrow$ 52
$\wedge$ 27, 78, 133
$\vee$ 27, 78, 134
? 28
$\overset{?}{}$ 28 y ss.
[] 34 y ss.
$\|$ 37
$\Rightarrow$ 38
" 38
$\Leftrightarrow$ 52, 100
$\leftrightharpoons$ 52
$=$ 52
$\sim$ 56 y ss.
{} 59
$\in$ 59
$\notin$ 59
$\cap$ 60
$\cup$ 60
$\llcorner$ 60
$\subseteq$ 60
$\imath$ 61
ι 61

Aritmética

$=$ 51, 63, 78, 102, 106
|,||,..... 53, 63
$\dot{+}$ 64, 102
$+$ 64, 70, 78, 102, 106
$\cdot$ 64, 70, 78, 102
$\times$ 106
0 69, 78, 106
$'$ 69, 78, 106
$\dddot{=}$ 55
| 133
$\leq$ 133, 143
$\nleq$ 144
$>$ 56
! 137
$\langle\rangle$ 137 y ss.
$\pi_0, \pi_1, \ldots$ 131
χ 136
N( ) 193
∞ 141
ω 85
ε_0 86
Π 137

Metamatemática

$*$ 106
ξ 106
Γ_+ 107
$\Gamma_\times$ 107
$\Gamma_=$ 107
$\Gamma_\wedge$ 107
$\Gamma_\vee$ 107
$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ 125
P_x 109
P_t 109
P_A 109
$P_<$ 111
δ 126
β 136 y ss.
$\dddot{=}$ 122 y ss.
$\dddot{\sim}$ 131 y ss.
$'$ 129
$\cdots/\ldots\equiv\ldots$ 112
Σ 112, 151
N 112 y ss.
Φ 112 y ss.
$\bar{\wedge}$ 82
$\longrightarrow$ 119
$\longleftrightarrow$ 119
$\vdash$ 119
$\nvdash$ 122

INTRODUCCION

Debemos el concepto de metamatemática a HILBERT. Correspondiendo vagamente al venerable término «metafísica», la «metamatemática» vendría a ser una ciencia cuyo objeto habría de buscarse en el conjunto de la matemática. Ahora bien, esta metamatemática no sería una disciplina filosófica, a diferencia de la metafísica, sino matemática, una teoría matemática.

La dificultad que ofrece esta determinación de la metamatemática salta a la vista. Si la metamatemática es una teoría matemática cuyo objeto consiste en la totalidad de la matemática misma, habría de contenerse a sí misma como objeto. La dificultad se soluciona con sólo advertir que, en este contexto, las palabras «matemático» y «matemática» no se refieren a lo mismo. Se trata, más bien, de una teoría matemática *constructiva* que tiene como objeto a la matemática entera, en la medida en que ésta se presenta como una teoría *axiomática*.

Con el fin de precisar esta determinación —evidentemente ya no circular— de la metamatemática, habremos de detenernos brevemente en el curso del razonamiento de HILBERT.

Una de las más imponentes hazañas matemáticas del siglo XIX fue el «descubrimiento» de las geometrías no euclidianas. Se trata, dicho sea en pocas palabras, de la demostración de la independencia lógica del célebre axioma de las paralelas respecto de los restantes axiomas euclídeos.

Basándose en trabajos de SACCHERI, LAMBERT y, sobre todo, GAUSS, LOBAČEVSKIJ y J. BOLYAI, pudieron demostrar BELTRAMI (1868) y KLEIN (1870) esta independencia aduciendo modelos euclídeos. En estos modelos eran válidos, naturalmente, todos los axiomas euclídeos, salvo el de las paralelas.

Y se dijo: puesto que la geometría euclidiana es consistente, también lo será todo sistema de proposiciones válidas en un modelo euclídeo, y, sobre todo, habrá de serlo el sistema que, negando el axioma euclídeo de las paralelas, conserve todos los demás. Este es, precisamente, el sentido de la citada independencia lógica.

Y se siguió investigando sobre la consistencia de la geometría euclídea. Se mejoró, en primer lugar, su axiomática, y se

completó, hasta que se pudo demostrar la posibilidad de derivar, de manera puramente lógica, todos los teoremas ya conocidos de la teoría, sin ayuda de la intuición geométrica, a partir del subyacente sistema de axiomas. El fruto primero de este esfuerzo ha de verse en la publicación, en 1899, por HILBERT, de sus *Grundlagen der Geometrie*[1].

Sobre la base de una axiomática impecable podía tenerse ahora la seguridad de que la geometría euclídea posee un modelo analítico. Esto ya se sabía desde DESCARTES (1637), a quien debemos la posible traducción de las proposiciones geométricas en analíticas (esto es, en proposiciones sobre números reales).

Unicamente sobre la base de una axiomatización impecable resulta legítimo pasar de la consistencia de los modelos analíticos a la consistencia de la geometría euclídea, necesaria lógicamente para la consistencia de la geometría no euclídea.

De donde el problema acabó siendo trasladado a la «consistencia de los modelos analíticos». Esta manera de hablar no deja de ser un tanto inexacta. Sólo un sistema de proposiciones puede implicar una contradicción, de donde sólo un sistema de proposiciones puede ser denominado, con pleno sentido, «consistente» (a saber, cuando no implica, a la vez, A y no-A, es decir, una proposición contradictoria). La pregunta, forzándonos a una mayor exactitud, habrá, pues, de girar en torno a si cada sistema de proposiciones válido en un modelo analítico es o no consistente.

Un modelo analítico no es otra cosa que un conjunto de objetos analíticos (p. ej., pares de números, ecuaciones lineares...), entre los que quedan definidas algunas relaciones de tipo analítico (p. ej., la igualdad, la posibilidad de resolver de una ecuación linear mediante un par de números...). Una proposición válida en uno de estos «modelos» no difiere de aquellas otras proposiciones analíticas que usualmente expresan la existencia de una relación analítica entre objetos analíticos.

[1] Existe reedición reciente de esta obra: David HILBERT, *Grundlagen der Geometrie* («Fundamentos de la Geometría»), B. G. Teubner, 1962. El C. S. I. C. publicó una versión castellana de la misma, por Francisco Cebrián, en 1953, que contiene cinco apéndices (sobre el concepto de número, sobre los fundamentos de la Lógica y de la Aritmética, sobre el infinito, sobre los fundamentos de la Matemática y sobre problemas de la fundamentación de la Matemática) que han sido eliminados en la citada reedición alemana de la obra. *(N. del T.)*

La consistencia de los modelos analíticos no es, por tanto, otra cosa que la consistencia del sistema de todos los teoremas analíticos. Y es en este punto, precisamente, donde se nos aparece la verdadera dificultad —todavía no resuelta a satisfacción de todos los matemáticos—. Aun sin haberse ocupado de todo el problema, hemos de insistir en el éxito del trabajo metamatemático hilbertiano, sobre todo a partir de 1918, que ha llevado asimismo a la matemática a nuevos problemas y resultados nuevos. En el terreno del álgebra, p. ej., y debido en buena parte a los trabajos de TARSKI, se han ido introduciendo con fuerza cada vez mayor los métodos metamatemáticos en los últimos decenios *(vid.* cap. IV).

El complejo de problemas relacionado con la consistencia del análisis ha ido surgiendo del encuentro de varias tendencias, cuyo breve examen vamos a intentar acto seguido.

Durante la antigüedad tardía se desarrolló, independientemente de la tradición geométrica griega, la aritmética indio-arábiga. A partir del Renacimiento, y sobre todo en el XVII, ambas teorías confluyeron, en Europa, en el cálculo infinitesimal y la geometría igualmente infinitesimal. Es decir, nuestro «análisis clásico». El siglo XIX trajo el intento de una aritmetización del análisis, es decir, la reducción de la teoría de los números reales a la de los llamados números naturales, 0, 1, 2... Este intento llevó, sin embargo, a CANTOR, DEDEKIND, WEIERSTRASS..., a la idea de que junto a la construcción de los números naturales (incluidas las funciones para ellos inductivamente definibles, tales como la adición, multiplicación, etc.) se precisaban para la edificación del análisis ciertos procesos referentes a la formación de conjuntos de números, de conjuntos de conjuntos de números, etc. Es decir, que la teoría de conjuntos, gracias sobre todo a CANTOR, se erigió en disciplina autónoma. No obstante, a partir de 1900 se observó que ciertas apreciaciones sobre las posibilidades de realización de estos procesos de formación de conjuntos, tenidas por evidentes, conducían a contradicciones.

En este contexto ha de situarse la conocida paradoja de RUSSELL acerca del conjunto de todos los conjuntos que, en cuanto a tal y por definición, ha de contenerse a sí mismo. Estas paradojas han dividido a ciertos espíritus, y continúan dividiéndolos todavía.

Tenemos, por una parte, a los llamados constructivistas (POINCARÉ, BROUWER, WEYL), según los cuales no hay por qué hacerse hipótesis acerca de la existencia de conjuntos, bastando con limitarse a aquellos que pueden, sin más, ser construidos. La discusión empieza, naturalmente, a la hora de definir lo que quepa entender como «construible». No hay posibilidades de delimitar el dominio de *todos* los métodos de construcción.

Están, por otra parte, los llamados axiomaticistas: ZERMELO, HILBERT, FRAENKEL, etc., según quienes hay que buscar unos axiomas de la teoría de conjuntos que permitan completar de la manera más sencilla posible los métodos deductivos, un tanto ingenuos, del análisis clásico, sin por ello conducir a contradicciones. En un principio, este intento pareció obtener un verdadero éxito. El sistema de ZERMELO-FRAENKEL, por ejemplo, permite la derivación axiomática impecable de todos los teoremas del análisis clásico (de cuyo sentido originario, sin embargo, hay que prescindir en este intento). Por otra parte, de los axiomas de este sistema no se ha derivado hasta la fecha ninguna contradicción; la consistencia del mismo, sin embargo, no ha podido ser demostrada hasta la fecha.

Con BROUWER como cabeza visible de los constructivistas e HILBERT de los axiomaticistas, menudearon las no leves polémicas durante los años veinte. Sin poderse convencer unos a otros, parecieron ganar momentáneamente los axiomaticistas, en la medida en que consiguieron ganar para sus teorías a la mayor parte de los matemáticos no especialmente interesados en estas cuestiones de investigación de los fundamentos. La mayoría de los tratados y cursos universitarios adquirieron rótulo «axiomaticista»; el constructivismo hubo de reducirse al intuicionismo de BROUWER en Amsterdam[2].

Hoy en día no resulta difícil advertir el porqué de la no solución teórica de esta polémica: entre ambas teorías de conjuntos, la axiomática y la constructivista, no media contradicción alguna. Es posible decidirse por ambas. Del mismo modo en que tanto

[2] Cfr. la formalización de la matemática intuicionista efectuada por A. HEYTING en su obra *Intuitionism*, North Holland Pub. Co., Amsterdam, 1966, que constituye la mejor exposición actualmente existente de la concepción, de origen brouweriano, de la matemática como actividad de construcciones intuitivas. *(N. del T.)*

un geómetra como un aritmético tienen su sitio en el vasto campo de la matemática, también lo tienen en ella ambas teorías de conjuntos y ambos análisis, axiomaticistas y constructivistas. Si se pregunta si es absolutamente necesario que junto a una de estas dos formas de teoría de conjuntos se practique también la otra, la polémica será inevitable, ya que cada uno de ambos bandos, llevado de su totalitarismo, querrá negar al otro el derecho a la existencia. No deja de ser, por ejemplo, importante el problema de si en un plan de estudios determinado haya de incluirse una matemática constructiva exclusivamente, o sólo una matemática axiomática. Pero éste es un problema de orden práctico. Las diferencias de opinión a este respecto no implican, ciertamente, una «crisis de principios».

Cualquier afirmación de la matemática axiomática tiene la siguiente forma: «del sistema de axiomas... es lógicamente derivable... la proposición...». La verdad de estas afirmaciones puede ser examinada por cualquiera, incluso por los constructivistas, tanto si éstos juzgan adecuado u oportuno el examen de estos axiomas, como si no.

Lo contrario tampoco tendría por qué resultar difícil: lo que se hace en matemática constructiva no tiene por qué resultar problemático para el axiomaticista. Este introduce sus axiomas porque quiere ir más allá de lo constructivamente alcanzable, porque quiere más. La mayoría de las veces piensa, además, que es conveniente, o incluso imprescindible, querer más. La situación, sin embargo, no es tan clara como parece indicar nuestra exposición. A menudo asistimos a unas ambiciones tales de exclusivismo por parte de los axiomaticistas que la «crisis de principios» no puede ser remediada. Este exclusivismo se retrotrae a FREGE (1879), con lo que nos centramos nuevamente en la lógica. Hay que aclarar su papel. A mediados del XIX, y tras un sueño de siglos (su última floración tuvo lugar en la Escolástica), la lógica se despertó a nueva vida. Frente a KANT, FREGE exigió la reducción de la Aritmética a la Lógica[3]. Este

[3] La importancia de Frege (1848-1925) en el pensamiento lógico-matemático es hoy —a excepción, posiblemente, de nuestro país, donde aún no ha sido editada traducción alguna de sus obras— de general conocimiento. En vida, sin embargo, apenas tuvo audiencia. Rudolf Carnap cuenta en su autobiografía intelectual (SCHILPP, ed.: *The Philosophy of R. C. Autobiography, My student years*, p. 5) que en su época de alumno de Frege las clases de éste «se reducían a nosotros dos

«logicismo» ya no es hoy defendido en serio por nadie, naturalmente, pero el reduccionismo de FREGE sobrevive en la teoría de conjuntos: los números son definidos por los axiomaticistas dentro de sus teorías de conjuntos como conjuntos de conjuntos equipotentes. Y si se considera que no vale la pena elaborar todo un sistema nuevo de axiomas para la teoría de conjuntos, se toma el de PEANO y se obtiene así una aritmética axiomática. La aritmética constructivista es considerada por los axiomaticistas, por el contrario, como una forma extremadamente precientífica de la aritmética.

La metamatemática hilbertiana se reveló como especialmente fructífera al aclarar la relación entre ambas aritméticas, la constructiva y la axiomática. No se podía predecir que el problema inicial de la consistencia del análisis conduciría, primero, a ese otro problema de la relación entre ambas aritméticas. Pero este desarrollo resultaba necesario, ya que sin aclarar tal relación apenas resultaba posible formular con exactitud el problema. Una vez tomada nota de la existencia de una matemática constructiva —independiente del método axiomático—, el problema de la consistencia del análisis sólo puede ser planteado con pleno sentido de una manera: probando que un análisis axiomático (o, más generalmente, una teoría axiomática de conjuntos) es consistente valiéndose de los medios de la matemática construc-

y a un oficial retirado». Tanto los comentarios de Schröder a la *Begriffschrift*, 1879 («Escritura conceptual»), como los de Cantor a *Die Grundlagen der Arithmetik* («Los fundamentos de la aritmética»), 1884, fueron más bien críticos. Los *Grundgesetze der Arithmetik* («Leyes fundamentales de la aritmética»), 1893 y 1903, fueron dados a conocer, en realidad, por Bertrand RUSSELL, en el apéndice A de su obra *Los principios de la matemática* (versión castellana de J. C. Grimberg, Espasa-Calpe, S. A., Madrid 1967), dedicado a *Las doctrinas de Frege sobre lógica y aritmética*. Nadie negaría hoy, no obstante, su condición de fundador, junto con Bertrand Russell —con quien compartía el «programa logicista» de reducción de la matemática a unos cuantos conceptos básicos de naturaleza lógica, programa hoy prácticamente olvidado—, de la lógica moderna. En su «Escritura conceptual» elaboró minuciosamente el viejo proyecto leibniziano de una *characteristica universalis*, creando un simbolismo original, si bien poco manejable por lo excesivamente complicado. En sus *Fundamentos de la aritmética* da la primera definición lógica de número cardinal *(Anzahl)*, de cuyo concepto elabora una teoría extensional. Esta obra contiene, por otra parte, una crítica penetrante del empirismo, de la abstracción en sentido clásico y del criticismo kantiano, en la medida en que subraya —inaugurando así una concepción de central importancia en el trabajo teórico de los miembros del Círculo de Viena— el carácter analítico y la naturaleza apriorística de las verdades matemáticas. *(N. del T.)*

tiva. Este problema se nos plantea en todo su sentido si pensamos en que la derivabilidad lógica de una contradicción a partir de un sistema de axiomas resulta definible dentro de la matemática constructiva. Con el fin de ver esto con mayor claridad será preciso volver los ojos, una vez más, a la lógica.

Debemos sobre todo a FREGE el punto de vista de que toda deducción lógica puede ser desarrollada de la manera siguiente. La clase de las formas proposicionales lógicamente verdaderas $A, B...$ —compuestas con la ayuda de las partículas lógicas de los símbolos de relación y las variables para objetos— es definida gracias a un cálculo, o sea, que una forma proposicional es lógicamente verdadera si y sólo si puede ser obtenida en un número finito de pasos a partir de un número finito de «fórmulas básicas» y de acuerdo con un número finito de «reglas de cálculo». Se puede pasar, pues, de una proposición $\mathfrak{a}$ a una proposición $\mathfrak{b}$ por deducción lógica si y sólo si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ resultan por sustitución (de los símbolos de relaciones por signos de relaciones particulares) de las fórmulas A y B, tales que la fórmula $A \rightarrow B$ («si A, entonces B») es lógicamente verdadera.

Al hablar aquí de «fórmulas básicas» y de «reglas de cálculo», a propósito de un cálculo lógico, se hace referencia a algo totalmente distinto de lo que se quiere indicar cuando se habla de los «axiomas» de una teoría axiomática de los que se hacen deducciones de acuerdo con unas «reglas lógicas». Pero es fácil confundirse. No obstante, hay que insistir en que un cálculo lógico opera con series finitas de signos, las fórmulas, y que la clase de las fórmulas lógicamente verdaderas es definida inductivamente. Metodológicamente no se diferencia esto en nada de la aritmética constructiva.

No habría, pues, crisis de fundamentos en la lógica de poderse llegar a un acuerdo acerca de las fórmulas lógicas básicas, así como acerca de las reglas de cálculo. La afirmación, debida a BROUWER (1907), de la autonomía de la matemática constructiva respecto de la axiomática iba, sin embargo, precisamente unida a un rechazo de la lógica «clásica», redescubierta y de nuevo desarrolla en el XIX. BROUWER dudaba de la legitimidad de afirmar, en el punto de partida, la verdad o falsedad de toda proposición matemática. No hay procedimiento alguno para decidir efectivamente sobre la verdad de una proposición ma-

temática dada. (Esta afirmación ha sido precisada luego por CHURCH en 1936, y probada en este preciso sentido. Cf. cap. III.) Limitándose al sentido efectivo que puede darse a las partículas lógicas (y, o, no, si... entonces, para todo, para algún), ha podido surgir una lógica no clásica, que HEYTING ha sido el primero en formalizar (1930), y a la que llamaremos lógica «constructiva». Para una matemática de tipo constructivo, sólo esta lógica constructiva tiene realmente sentido. Por otra parte, también se han encontrado varias posibilidades de reinterpretación de las partículas lógicas, de tal modo que pueda ser justificado el uso de la lógica clásica. De ahí que aquellos axiomaticistas que niegan todo derecho de existencia a la matemática constructiva proclamen la exclusiva bondad de la lógica clásica.

De todo ello se deriva la necesidad de aclarar la relación entre lógica constructiva y lógica clásica previamente incluso al estudio de la relación entre aritmética constructiva y axiomática: la aritmética no es, en este contexto, otra cosa que el prototipo de una teoría constructiva. Respecto de la estrecha relación existente entre axiomática y lógica clásica resulta hoy muy importante lo siguiente: GÖDEL demostró (1930) que las fórmulas lógicamente verdaderas son, precisamente, aquellas que en cada sustitución (de los símbolos de relación por signos de relaciones particulares) se transforman en proposiciones verdaderas. Así es posible definir la verdad lógica de una fórmula dentro de una teoría axiomática de conjuntos. Esta no es sino la definición «semántica» de verdad lógica de TARSKI (1933). Definición que se ha revelado como muy útil para la investigación de teorías axiomáticas, en la medida en que quepa emprender este tipo de investigaciones dentro de una teoría (axiomática) de conjuntos. Aunque, por otra parte, también la investigación constructiva de teorías axiomáticas ha obtenido utilidad a menudo de las investigaciones semánticas. Sólo que, por lo general, la teoría de conjuntos ocupa un lugar muy secundario, de tal modo que no resulta difícil darla completamente de lado. Con lo que ya sólo basta con tener en cuenta que la investigación axiomática se sirve de la lógica clásica, teniendo, pues, la investigación constructiva que esforzarse todavía por conseguir una interpretación constructiva de los resultados.

Con todo lo cual llegamos al final del camino que había de conducirnos al punto en el que es posible definir la metamatemática. Un camino difícil —al menos aparentemente— a través de todos los escollos que ha provocado la matemática en su crisis de principios. Habríamos de revisar algún otro punto conflictivo, tal como la relación entre Lógica y lenguaje natural, por ejemplo, pero no es éste el lugar más adecuado. Podemos, pues, definir ahora la metamatemática, en líneas generales, como la teoría matemática que se ocupa de las teorías axiomáticas. De ahí que el término «metamatemática» ya no haga referencia —como ocurría en HILBERT— a la «teoría de la matemática (axiomática)», sino a la «matemática de las metateorías». Siendo una metateoría, en este contexto, una teoría (constructiva o axiomática) sobre las teorías axiomáticas. En esta generalización queda contenida todavía, naturalmente, la metamatemática hilbertiana, siempre que las metateorías no se limiten a las axiomáticas sólo, como ocurre en la semántica de TARSKI, sino que tomen en consideración también las metateorías constructivas.

El lenguaje del que nos vamos a servir en este libro para llevar a cabo la investigación, y exponer los resultados, es, en todo momento, el de la matemática constructiva. En la medida, pues, en que se utilizan aquí las partículas lógicas del lenguaje natural, éstas mantienen siempre su sentido constructivo. Lo que no supone una limitación a la metamatemática constructiva, ya que cualquier investigación axiomática (aquí sobre las metateorías axiomáticas) puede ser perfectamente formulada en este lenguaje. Se trata, en este caso, de proposiciones pertenecientes a una metateoría constructiva. De todos modos, trataremos como metamatemática todas las iteraciones de «meta». Incluso la utilización de la lógica clásica (en vez de la constructiva) para una investigación determinada no consiste en otra cosa que en la aplicación de ciertas normas —constructivamente definibles— a las proposiciones, consideradas como series de signos, y los resultados pueden ser comunicados asimismo en el lenguaje de la matemática constructiva.

El capítulo I contiene una introducción a la lógica clásica y constructiva. Se ocupa, en particular, del problema de la interpretación de las partículas lógicas. La completitud de la lógica constructiva es probada constructivamente según la interpretación «operativa» desarrollada por el autor. Interpretación

que es diferenciada ahora con toda precisión respecto de procedimientos anteriores gracias al uso que hace de diálogos[4].

El capítulo II se ocupa de la formalización de la aritmética clásica a partir de PEANO, la semiformalización completa (es decir, con la inducción infinita) de la aritmética clásica y una prueba constructiva de la consistencia que introduce la inducción infinita en el *Hauptsatz* de GENTZEN.

El capítulo III comienza definiendo la noción de enumerabilidad (recursiva) como una precisión de la noción de «formalismo». Con lo que son asimismo definidas las clases (recursivamente) decidibles de fórmulas. Los teoremas de la indecibilidad de la aritmética, y con ellos, el teorema de incompletitud de GÖDEL, resultan inmediatamente después de la prueba de que todas las clases decidibles de números son fielmente representables en la aritmética de PEANO (e incluso en la de ROBINSON). A modo de complemento es incluido el teorema de GÖDEL sobre la no-derivabilidad (de la consistencia formalizada).

En el capítulo IV son probados, en primer lugar, los teoremas de indecibilidad para ciertas teorías axiomáticas. Para lo cual se hace uso del capítulo III y de la consistencia de la aritmética demostrada en el capítulo II. La prueba de los teoremas de TARSKI relativos a la decibilidad de los cuerpos algebraicos cerrados y de los cuerpos reales cerrados es, por el contrario, lógicamente independiente de los capítulos II y III.

Este libro no pretende ser sino una introducción a la metamatemática. De ahí que sólo se haya aludido a los métodos generales de la investigación de teorías axiomáticas. Las investigaciones metamatemáticas de teorías axiomáticas especiales, como ocurre en el capítulo IV, son aducidas únicamente a título de ejemplo.

De ahí que no sea tratado el problema inicial de HILBERT, es decir, el de la consistencia del análisis. En aquel caso se trata, ciertamente, de sistemas especiales de axiomas de la teoría de conjuntos, cuyo estudio requiere métodos particulares. Este problema no pertenece ya, pues, a la metamatemática general,

[4] La presente versión de la *Metamatemática* de LORENZEN sigue el texto de la 2.ª edición alemana de la obra (Mannheim, 1969), en la que su autor fija, de manera «exacta y definitiva», el sistema de reglas de los diálogos que en ella figuran. *(N. del T.)*

sino a la metateoría de la teoría de conjuntos, y su investigación presupone el conocimiento de la teoría ingenua y axiomática de conjuntos. Desborda, por tanto, el marco de este libro. El lector puede acudir, sin embargo, al libro de KURT SCHÜTTE: *Beweistheorie*, 1960, que contiene todo cuanto se sabía en el momento de su aparición [5].

[5] KURT SCHÜTTE: *Beweistheorie* («Teoría de la prueba»), Springer Verlag, 1960. *(N. del T.)*

I

FORMALIZACION DE LA LOGICA

Como hemos indicado en la introducción, la metamatemática ha sido posible a partir de una formalización de la lógica. Y esa es la tarea de la que en primer lugar vamos a ocuparnos, llevando a la vez a cabo algunas investigaciones en torno a la lógica formalizada, pertenecientes, por tanto, al campo de la metalógica, es decir, a una teoría cuyo objeto es la lógica formalizada.

De la lógica clásica no nos ocupamos aquí, sino de manera en extremo sucinta, ya que la bibliografía ofrece no pocas asequibles y detalladas exposiciones de la misma, p. ej. HILBERT-ACKERMANN, 1959; LORENZEN, 1958[1].

§ 1. LÓGICA CLÁSICA DE YUNTORES

Nos limitaremos en este parágrafo a las proposiciones v-definidas[2], es decir, a aquellas proposiciones respecto de las cuales es posible decidir (efectivamente) si son verdaderas o falsas. No es necesario entrar en el problema de qué sea una «proposición» y qué es «verdad». La afirmación de una proposición v-definida, como su expresión, p. ej., en un diálogo, es siempre un acto al que corresponde un procedimiento que decide si dicho acto es legítimo o errado. De ahí que podamos admitir como proposición v-definida todo esquema de acto para el que se haya fijado un procedimiento que —utilizado en un acto realizado de acuerdo con dicho esquema—, nos dé exactamente uno de dos «valores». Ambos valores reciben el nombre de «valores de verdad», y se representan por medio de las palabras «verdadero» y «falso», o por los símbolos $\vee$ y $\wedge$. Digamos brevemente que la proposición, «tiene» el valor que le da el procedimiento de decisión.

[1] Como el lector puede comprobar en la bibliografía que figura al final de la obra, existe versión castellana de estos dos manuales de lógica. *(N. del T.)*

[2] Traducimos *wahrheitsdefinit*, esto es, «definido en el sentido de la verdad» por «v-definido». *(N. del T.)*

Como variables (semánticas) para las proposiciones nos servimos de: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ...

Si $\mathfrak{a}$ es una proposición, $\neg\,\mathfrak{a}$ (no $\mathfrak{a}$) será una proposición de valor opuesto, o sea, si $\mathfrak{a}$ tiene valor $\vee$, $\neg\,\mathfrak{a}$ tendrá el valor $\wedge$, y viceversa. Queda así determinado un procedimiento de decisión para las proposiciones formadas con $\neg$.

Con dos proposiciones $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, y uniendo ambas con $\wedge$ *(et)* y $\vee$ *(vel)* obtenemos nuevas proposiciones $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$, para las que el procedimiento de decisión queda determinado con las siguientes «tablas de verdad»:

		$\mathfrak{b}$	
	$\wedge$	$\vee$	$\wedge$
$\mathfrak{a}$	$\vee$	$\vee$	$\wedge$
	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$

		$\mathfrak{b}$	
	$\vee$	$\vee$	$\wedge$
$\mathfrak{a}$	$\vee$	$\vee$	$\vee$
	$\wedge$	$\vee$	$\wedge$

Los tres signos funcionales $\wedge$, $\vee$, $\neg$ reciben el nombre de conexiones lógicas o, más brevemente, «yuntores». Las funciones correspondientes (negación $\neg$, conjunción $\wedge$, adjunción $\vee$[3]) tienen proposiciones v-definidas como valores y argumentos. El valor de verdad del valor de la función depende sólo de los valores de verdad de los argumentos. Estas funciones proposicionales proporcionan por abstracción «funciones veritativas» cuyos argumentos y valores son valores de verdad.

En tanto que una proposición primitiva, es decir, una proposición que no está formada a base de yuntores (hemos partido precisamente de este tipo de proposiciones), sólo puede ser «verdadera» o «falsa», con las proposiciones compuestas se da el fenómeno nuevo de que pueden ser «lógicamente verdaderas»,

[3] Traducimos el término *Adjunktion* por el neologismo «adjunción». *(N. del T.)*

es decir, verdaderas sobre la sola base de la lógica. Para definir esta verdad lógica habremos de considerar primero las «formas» de las proposiciones. Sean $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ y $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ dos grupos de tres proposiciones primitivas diferentes. Las dos proposiciones $(\mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{b}_1) \vee \neg \mathfrak{c}_1$ y $(\mathfrak{b}_2 \vee \mathfrak{c}_2) \vee \neg \mathfrak{a}_2$, por ejemplo, tienen la misma forma: están formadas a base de los mismos yuntores con proposiciones primitivas y en igual orden. Para poder disponer de las formas proposicionales como objetos autónomos se utilizan nuevos símbolos, los símbolos proposicionales *a*, *b*, *c*, ... La forma común de las proposiciones anteriores será: $(a \wedge b) \wedge \neg c$.

Las formas proposicionales son series de signos compuestas a base de símbolos proposicionales (llamados generalmente variables proposicionales) y yuntores. Se llaman también «fórmulas», o más exactamente «fórmulas lógicas de yuntores». Para las fórmulas utilizamos las variables (sintácticas) *A*, *B*, ... En lugar de los paréntesis habituales (,), que determinan el orden de aplicación de las funciones veritativas, usamos una puntuación algo más cómoda. En lugar de $(a \wedge b) \vee \neg c$ escribiremos $a \wedge b \dot{\vee} \neg c$, y en lugar de $((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2)) \wedge c$ pondremos $a_1 \wedge b_1 \dot{\vee} a_2 \wedge b_2 \ddot{\wedge} c$, etc. Para indicar que un yuntor $\wedge$ o $\vee$ viene «después», se le pondrá encima un punto adicional. Si, por el contrario, detrás de $\neg$ hay un par de paréntesis, como, por ejemplo, el doble par de $\neg$ $(\neg (a \wedge b) \wedge c)$, se sustituirá simplemente cada paréntesis por un punto al nivel de la línea: $\neg. \neg. a \wedge b. \wedge c$.

Se dice, pues, que una forma proposicional es lógicamente verdadera cuando todas las proposiciones de esta forma son verdaderas. A estas proposiciones las llamaremos igualmente lógicamente verdaderas. Por ejemplo, la forma $a \wedge b \dot{\vee} \neg a \vee \neg b$ es lógicamente verdadera. Para comprobarlo no hay más que poner para *a* y *b*, en las cuatro combinaciones diferentes posibles, los valores veritativos $\vee$, $\wedge$. Las tablas de verdad arrojan todas las veces el valor $\vee$.

La adjudicación de valores veritativos a todos y cada uno de los símbolos proposicionales contenidos en una fórmula recibe el nombre de «interpretación». Si una fórmula *A* recibe, al ser interpretada, el valor $\vee$, la interpretación se llama entonces un «modelo» de la fórmula *A*. Las fórmulas lógicamente verdaderas son en esta terminología —demasiado complicada

acaso para este contexto— aquellas para las cuales cada interpretación es un modelo.

Junto a la verdad lógica podemos ya definir también lo que es una inferencia lógica (para una lógica de yuntores). Si tenemos dos fórmulas *A* y *B*, tales que cada modelo de *A* sea también un modelo de *B*, decimos que la fórmula *A* implica lógicamente (en la lógica de yuntores) la fórmula *B*. Entendemos que una inferencia de una proposición $\mathfrak{b}$ a partir de otra $\mathfrak{a}$ (es decir, el simple paso de, p. ej., $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$) es una inferencia lógica cuando hay fórmulas *A* y *B* tales que: 1) *A* implica lógicamente *B*, y 2) $\mathfrak{a}$ o $\mathfrak{b}$ resultan *A* o *B* por igual sustitución.

En la medida en que se trata de proposiciones v-definidas, y solamente de yuntores, queda aclarado ese fundamental concepto lógico que es la inferencia lógica. Esta parte de la lógica recibe el nombre de lógica clásica de yuntores. Como se ve, la lógica se ocupa de las formas proposicionales, no de las proposiciones mismas. De ahí su nombre de «formal».

Si una fórmula *A* implica una fórmula *B*, escribimos $A < B$.

Si recíprocamente vale también $B < A$ (para lo que puede escribirse $A > B$), *A* y *B* recibirán el nombre de equivalentes (para la lógica de yuntores). Escribimos en este caso: $A \asymp B$.

La implicación, que es una relación entre fórmulas ($<$ y $\asymp$ no son, desde luego, yuntores), puede retrotraerse a la verdad lógica. Si cada modelo de *A* es un modelo de *B*, cada interpretación será evidentemente un modelo de $\neg A \vee B$ y viceversa. Puede aducirse un nuevo yuntor $\rightarrow$, tal que $A \rightarrow B$ sea una abreviatura de $\neg A \vee B$, de manera que *A* implique exactamente *B* si la fórmula $A \rightarrow B$ es lógicamente verdadera. La función proposicional correspondiente a $\rightarrow$ recibe a menudo el nombre de «implicación», o aún más exactamente, «implicación material». Para diferenciarla, sin embargo, de la relación de implicación arriba definida le daremos en lo que sigue el nombre de «condicional»[4].

Si, por el contrario, se toma la implicación lógica como concepto fundamental, podremos retrotraernos a partir de ella a la verdad lógica. Tómese una fórmula lógicamente verdadera

[4] Traducimos el término *Subjunktion* por el de «condicional», de uso más extendido en nuestra terminología lógica. *(N. del T.)*

cualquiera, p. ej., $a \vee \neg a$. Puesto que esta fórmula tiene, para toda interpretación, el valor V, podremos designarla brevemente con V. (En lugar de $\neg \mathsf{V}$ escribiremos el correspondiente $\wedge$.)

De acuerdo con todo esto, una fórmula A es lógicamente verdadera si y sólo si V implica lógicamente A, es decir, si vale $\mathsf{V} < A$.

§ 2. Lógica constructiva de yuntores y cuantificadores

La lógica de yuntores que hemos desarrollado en el § 1 presupone que las proposiciones consideradas estén ya v-definidas: la pregunta acerca del valor de verdad habría de ser, pues, en todo momento (efectivamente), decidible. ¿Están acaso v-definidas todas las proposiciones correctamente formuladas dentro de nuestros lenguajes naturales? Evidentemente, no. Para encontrar contraejemplos a este respecto no hace falta buscar proposiciones de las que sea dudoso si, en general, «tienen sentido», tales como «yo miento ahora» o «la estructura del espacio real es euclídea». Ya hay suficientes contraejemplos en el campo de las proposiciones que nadie puede poner seriamente bajo la sospecha de «carentes de sentido».

Tómese la siguiente suposición acerca de los números (naturales) enteros (se dice de un número que es entero cuando equivale a la suma de sus divisores propios; p. ej., $6 = 1 + 2 + 3$ y $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ son enteros): «Algunos números impares son enteros».

Está claro cómo se podría *demostrar* la verdad de esta proposición: bastaría «sólo» con encontrar un número impar n tal que, calculando la suma de sus divisores propios, volviera de nuevo a dar exactamente n. Hasta la fecha nadie sabe de un número semejante. Nadie sabe hasta la fecha tampoco si en el futuro se encontrará algún número de este tipo. Por otra parte, tampoco está muy claro el problema de las posibilidades con que efectivamente se cuenta para una *demostración* de la proposición «ningún número impar es entero». Carecemos, pues, de un procedimiento para decidir la verdad de la proposición según la cual algunos números impares son enteros. ¿Qué sentido tiene entonces el decir que a pesar de todo esta proposición es

o verdadera o falsa, es decir, «en sí» verdadera o falsa? La pregunta opuesta nos diría: ¿por qué no *admitir* que la proposición es o bien verdadera o bien falsa aunque (todavía) no sepamos efectivamente cuál de ambos casos es el válido? A lo que aún puede responderse con otra pregunta: ¿acaso la suposición de que cualquier proposición es o bien verdadera o bien falsa —sin que con ello se quiera indicar que esta disyuntiva sea efectivamente decidible— no vendrá a significar únicamente que:

(1) ninguna proposición puede ser a la vez verdadera y falsa, y (2) ni tampoco a la vez no verdadera y no falsa?

Puesto que la falsedad de una proposición $\mathfrak{a}$ equivale a la verdad de $\neg \mathfrak{a}$, ambos principios pueden simbolizarse así:

(1) $\neg (\mathfrak{a} \wedge \neg \mathfrak{a})$
(2) $\neg (\neg \mathfrak{a} \wedge \neg \neg \mathfrak{a})$

De acuerdo con la lógica clásica de yuntores, (1) y (2) son equivalentes a $\mathfrak{a} \vee \neg \mathfrak{a}$.

A partir de todo esto, la proposición «algunos números impares son enteros o ningún número impar es entero» ¿es acaso lógicamente verdadera? Resulta cuando menos problemático que la lógica clásica de yuntores resulte aquí aplicable o no sea más bien «onbetrouwbaar», como Brouwer caracterizaba la situación. Con una proposición del tipo «algunos planetas carecen del satélite luna» no ocurre lo mismo. En este caso, se parte de la posibilidad de comprobar la existencia del satélite. Por otra parte, sólo hay un número finito de planetas. El examen de los casos individuales es lo que da *en principio* el procedimiento de decisión. Claro que *en principio* no es posible examinar si todos los números impares son enteros, ya que su número es infinito. Por otra parte, el que lo infinito pueda manejarse como lo finito es, en definitiva, falso. El problema planteado por la crítica de Brouwer a la lógica clásica consiste en investigar en qué medida resulta necesaria una modificación de la lógica para su aplicación a las clases infinitas.

Puesto que los yuntores de la lógica clásica son definidos por funciones veritativas, habrán de ser ahora definidos los yuntores de nuevo si se abandona la hipótesis de la lógica clásica, según la cual no se manejan sino proposiciones v-definidas. Respecto de nuestra proposición «algunos números impares son

enteros», que no es v-definida, hemos visto cómo se puede decidir si existe una «prueba» a su respecto: se trata de aducir un número impar n y cuyos divisores propios sumados den nuevamente n. Aquí ha sido fijado un procedimiento decisorio: no respecto de la verdad, sino respecto de la propiedad de un procedimiento posterior (procedimiento que consiste normalmente en escribir proposiciones) de ser una «prueba». Las proposiciones con un procedimiento de decisión semejante pueden llamarse p-definidas[5]. De igual manera que no era necesario definir el concepto de verdad respecto de las proposiciones v-definidas, no es tampoco necesario definir ahora el concepto de prueba. Bastará en cada caso con que de alguna manera quede determinado un procedimiento de decisión respecto de lo que sea y no sea una «prueba».

Acto seguido va a ser introducida una lógica «constructiva» en la que la verdad lógica de las proposiciones será definida de acuerdo con la hipótesis de que dichas proposiciones están compuestas a base de proposiciones p-definidas. Las proposiciones compuestas ya no serán, por lo general, p-definidas, si bien todas serán «definidas» en un sentido más amplio, al que todavía habremos de referirnos.

Las composiciones de proposiciones p-definidas con $\wedge$ y $\vee$ resultan en realidad p-definidas determinando lo siguiente: se obtiene una prueba de $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ aduciendo una prueba de $\mathfrak{a}$ *y* una prueba de $\mathfrak{b}$. Partimos de la base de que el lector comprende lo que es hacer dos cosas seguidas, es decir, primero una *y* luego otra. En caso contrario, deberá seguir una enseñanza práctica con el fin de aprenderlo. Se trata de algo que no puede aprenderse en un libro, del mismo modo, por ejemplo, en que resulta imposible aprender a leer en un libro si todavía no se sabe leer.

Respecto de $\vee$ afirmamos que se obtiene una prueba de $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$ aduciendo una prueba de $\mathfrak{a}$ *o* una prueba de $\mathfrak{b}$ (o sea, de una de ambas a elegir).

La definición de lo que es la «prueba» de una adjunción se extiende fácilmente de dos proposiciones a otras muchas, e incluso a un número infinito de ellas. Sea $\mathfrak{a}(x)$ una forma

[5] Traducimos *beweisdefinit*, esto es, «definido en el sentido de la prueba», por «p-definido». *(N. del T.)*

proposicional aritmética, p. ej., «x es entero», con una sola variable x para los llamados números naturales 0, 1, 2..., y sea la proposición $\mathfrak{a}(n)$ p-definida para todo número natural n. De estas formas proposicionales se obtienen otras nuevas proposiciones $\vee_x \mathfrak{a}(x)$ («para algún x: $\mathfrak{a}(x)$»), para las que se determina: se obtiene una prueba de $\vee_x \mathfrak{a}(x)$ aduciendo un número natural n *y* una prueba de $\mathfrak{a}(n)$.

$\vee_x \mathfrak{a}(x)$ es, pues, una «adjunción infinita»; sería posible escribirla también del siguiente modo: $\mathfrak{a}(0) \vee \mathfrak{a}(1) \vee \mathfrak{a}(2) \vee \ldots \vee \mathfrak{a}(n) \vee \ldots$ (siempre que la determinación de lo que a este respecto es una prueba no sufra cambio alguno). Evidentemente, $\vee_x \mathfrak{a}(x)$ es, no obstante, una notación más adecuada, del mismo modo que en matemáticas se prefiere generalmente escribir $\Sigma_x f(x)$ en lugar de $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$

Es evidente que una «conjunción infinita» no puede ser introducida de este mismo modo como proposición p-definida. No es necesario exigir que quien afirme que «para todo x: $\mathfrak{a}(x)$» (escrito en lenguaje simbólico: $\wedge_x \mathfrak{a}(x)$, en donde $\mathfrak{a}(x)$ es nuevamente una forma proposicional aritmética tal que todas las proposiciones $\mathfrak{a}(n)$ sean p-definidas) esté asimismo obligado a aportar una «prueba» de su afirmación. Su afirmación tendrá ya sentido con sólo que se obligue a aportar una prueba de $\mathfrak{a}(n)$ para todo n que se le proponga. El campo de las posibilidades existentes para asegurarse de que siempre podrá cumplirse la obligación asumida al afirmar que $\wedge_x \mathfrak{a}(x)$ no ha sido todavía en absoluto delimitado. Por otra parte, resulta superfluo entrar en la problemática de una delimitación semejante si con ello se renuncia a hacer de universales como $\wedge_x \mathfrak{a}(x)$, proposiciones p-definidas. En virtud de todo lo que hemos dicho, las proposiciones universales son definidas en un sentido más amplio, es decir, son definidas en «sentido dialógico» o «d-definidas»[6].

Figúremonos dos personas, de las cuales una afirma que $\wedge_x \mathfrak{a}(x)$. La otra está justificada para aducir acto seguido un número natural n elegido por ella. Si la primera persona puede ofrecer la prueba correspondiente a $\mathfrak{a}(n)$, ha ganado. De lo contrario, ha perdido. El resultado final del diálogo queda así,

[6] Traducimos *dialogischdefinit*, esto es, «definido en el sentido del diálogo», por «d-definido». *(N. del T.)*

pues, siempre definido, de tal modo que las proposiciones universales pueden ser consideradas como «d-definidas». Se dice de manera general que una proposición es d-definida si para su afirmación en el curso de un diálogo las reglas a que ambos interlocutores se han sometido han sido determinadas de tal manera que en todo momento puede decidirse: 1) si el diálogo ha terminado ya, y 2) quién es en tal caso el ganador. El «yo paso» no está permitido.

Si se parte de proposiciones p-definidas, toda posible proposición formada a base de un número finito o infinito de conjunciones y adjunciones será —como se deduce de todo lo anterior— d-definida. Seguimos en este dominio de proposiciones al introducir una negación $\neg$ de acuerdo con las siguientes instrucciones. Si el primero de ambos interlocutores afirma $\neg\,\mathfrak{a}$ partiendo de una proposición d-definida, el segundo está en el derecho: 1) de aceptar la afirmación (diciendo «non dubito» o, simbólicamente, «$\frac{?}{}$»), en cuyo caso ha ganado el primero, o 2) puede afirmar $\mathfrak{a}$ a su vez, en contra de $\neg\,\mathfrak{a}$. En este último supuesto escribimos $\mathfrak{a}$?, quedando el ataque significado por el signo «?». Según el segundo gane o pierda este diálogo comenzado con $\mathfrak{a}$, ha perdido o ganado el primero. De modo que $\neg\,\mathfrak{a}$ sólo puede ganar en el caso de que el interlocutor haya podido ser obligado a perder $\mathfrak{a}$. En los lenguajes naturales resultaría, pues, por todo ello preferible referirse a $\neg\,\mathfrak{a}$ como «$\mathfrak{a}$ es refutable» que no simplemente como «no $\mathfrak{a}$».

Vamos a ensayar de acuerdo con estas reglas un diálogo con $\neg.\,\mathfrak{a} \wedge \neg\,\mathfrak{a}$. El que comience el diálogo con una afirmación —le daremos el nombre de proponente *P*— podrá siempre ganar, en el caso de $\neg.\,\mathfrak{a} \wedge \neg\,\mathfrak{a}$. sobre su adversario, el oponente *O*:

	O	*P*
(1)		$\neg.\,\mathfrak{a} \wedge \neg\,\mathfrak{a}$.
(2)	$\frac{?}{}$ | $\mathfrak{a} \wedge \neg\,\mathfrak{a}$?	*L*?
(3)	$\mathfrak{a}$	*R*?
(4)	$\neg\,\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$?

Esta tabla representa la estrategia a seguir por *P* para ganar. La división en columnas a partir de la línea (2) se debe al hecho de que *O* puede elegir entre $\frac{?}{}$ y $\mathfrak{a} \wedge \neg\,\mathfrak{a}$. A la derecha, *P* pregunta

con «*L*?» (a la izquierda, «dubito») y *O* tiene que contestar con el miembro izquierdo de la conjunción, $\mathfrak{a}$. Pregunta acto seguido por el miembro derecho y de acuerdo con la respuesta $\neg\,\mathfrak{a}$ de *O* puede responder a su vez con $\mathfrak{a}$? Si *O* exigiera al llegar a este punto una prueba de $\mathfrak{a}$, *P* podría exigírsela a él primero, dado que fue *O* quien primero afirmó $\mathfrak{a}$. *P* dispone, pues, en todo momento de una estrategia para ganar, con sólo limitarse a no afirmar otras proposiciones primitivas que las ya afirmadas anteriormente por *O*.

He aquí la tabla correspondiente a la proposición lógicamente verdadera en lógica clásica $\mathfrak{a} \vee \neg\,\mathfrak{a}$:

	O	*P*
(1)		$\mathfrak{a} \vee \neg\,\mathfrak{a}$
(2)	?	$\mathfrak{a}$ | $\neg\,\mathfrak{a}$
(3)	? | $\mathfrak{a}$?	

En la línea (2) a *P* le corresponde elegir entre $\mathfrak{a}$ y $\neg\,\mathfrak{a}$. Si elige $\mathfrak{a}$ y no puede aportar una prueba de $\mathfrak{a}$, pierde. Si, por el contrario, elige $\neg\,\mathfrak{a}$, en el caso de que *O* pueda probar la tesis $\mathfrak{a}$, pierde igualmente. De manera que afirmando la tesis $\mathfrak{a} \vee \neg\,\mathfrak{a}$ *P* sólo puede ganar sabiendo: 1) o bien que él puede probar $\mathfrak{a}$, o bien 2) que *O* no puede probar $\mathfrak{a}$. De ahí que por regla general *P* no pueda ganar esta tesis. Porque aunque *P* sepa que su oponente conoce, p. ej., dos números amigos, es decir, dos números tales que cada uno de ellos sea el resultante de la suma de los divisores propios del otro, no por ello tiene todavía ninguna posibilidad de encontrar él mismo dos números de este tipo. Sólo gracias a la suerte podría dar probando con 220 y 284, por ejemplo. Vemos aparecer así una diferencia entre las formas proposicionales $\neg.\,a \wedge \neg\,a.$ y $a \vee \neg\,a$, ambas lógicamente verdaderas según la interpretación clásica de los yuntores (es decir, respecto de proposiciones v-definidas). Porque las proposiciones de la forma $\neg.\,a \wedge \neg\,a.$ pueden ser siempre ganadas en un diálogo, a diferencia de lo que ocurre con las de la forma $a \vee \neg\,a$. En este último caso hay que decidir entre $\mathfrak{a}$ y $\neg\,\mathfrak{a}$, cosa que sólo puede hacerse de acuerdo con el contenido de $\mathfrak{a}$ y no sólo a partir de su forma.

Llegamos así a un nuevo concepto de verdad lógica, más riguroso que el usual de la lógica clásica, es decir, a la verdad lógica constructiva de una forma proposicional. Diremos que una forma es lógicamente verdadera de manera constructiva si y solamente si toda proposición de esta forma puede ser ganada en un diálogo (contra todo oponente). Pero con esto no queda todavía suficientemente definida la verdad lógica constructiva, ya que nos hemos referido a todas las proposiciones y a todos los oponentes. Y en la lógica formal, sin embargo, en la medida en que es una teoría de las formas proposicionales, los conceptos utilizados no deben ser definidos sino con la exclusiva ayuda de las formas.

Antes de dar una definición definitiva vamos a extender el dominio de las formas proposicionales al condicional (constructivo). En la lógica clásica $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ no era sino una abreviatura de $\neg\, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$. Ahora bien, si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son d-definidos, el uso de $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ en un diálogo puede muy bien realizarse de acuerdo con el significado de la expresión «si $\mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{b}$», del siguiente modo. Si el primer interlocutor afirma $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$, el segundo puede elegir entre $\not{?}$ y $\mathfrak{a}$? En caso de $\not{?}$, el primer interlocutor ha ganado; en caso de $\mathfrak{a}$, tiene que afirmar $\mathfrak{b}$, siempre que el segundo haya defendido su tesis $\mathfrak{a}$. Y la ganancia y la pérdida se orientan al desenlace del diálogo de acuerdo con $\neg\, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$. Esta utilización difiere de la utilización de $\neg\, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$. Así, por ejemplo, $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ (contrariamente a $\neg\, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{a}$) puede ser siempre ganada. Si P sostiene, por ejemplo, una proposición $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, sólo estará obligado a afirmar $\mathfrak{a}$ en el caso de que O lo haya hecho antes. El condicional (constructivo) $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ no es, pues, abreviatura alguna de $\neg\, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$.

Antes de entrar en la explicación sistemática de los diálogos y sus estrategias de ganancia vamos a considerar dos ejemplos:

	O	P	
(1)		$\neg\neg \wedge_x \mathfrak{a}(x) \to \wedge_x \neg\neg \mathfrak{a}(x)$	
(2)	$\neg\neg \wedge_x \mathfrak{a}(x)$?	$\wedge_x \neg\neg \mathfrak{a}(x)$	
(3)	n ?	$\neg\neg \mathfrak{a}(n)$	
(4)	$\neg\, \mathfrak{a}(n)$?	$\neg \wedge_x \mathfrak{a}(x)$	? (2)
(5)	$\wedge_x \mathfrak{a}(x)$?		n ? (5)
(6)	$\mathfrak{a}(n)$	$\mathfrak{a}(n)$	? (4)

En la línea (2) O responde, siguiendo la regla válida para $\to$, con el antecedente, y P, acto seguido, con el consecuente. En la línea (3) O pide una justificación de $P(2)$ y P está obligado a responder. En la línea (4) O ataca la tesis $P(3)$ y P responde, a su vez, atacando $O(2)$. Acto seguido, O ataca $P(4)$, P pide una justificación de $O(5)$, O responde preceptivamente, y P puede, en consecuencia, atacar $O(4)$, con lo que gana.

Este ejemplo indica con toda claridad cómo deben ser aplicadas en un diálogo las reglas anteriormente dadas. En cada línea, P sólo tiene que limitarse a defender la última afirmación por él aducida, en tanto que por parte de O han de ser defendidas todas sus anteriores afirmaciones. Esta asimetría se ha hecho necesaria dado que —dedicando nuestra atención exclusivamente a la forma de las proposiciones— a O se le autoriza a afirmar sin prueba cualquier proposición atómica deseada.

He aquí un ejemplo de una afirmación que P no puede ganar basándose sólo en la forma:

	O		P	
(1)			$\wedge_x \neg\neg \mathfrak{a}(x) \to \neg\neg \wedge_x \mathfrak{a}(x)$	
(2)	$\wedge_x \neg\neg \mathfrak{a}(x)$?		n ? (2)	$\neg\neg \wedge_x \mathfrak{a}(x)$
(3)	$\neg\neg \mathfrak{a}(n)$	$\neg \wedge_x \mathfrak{a}(x)$?	$\neg\, \mathfrak{a}(n)$? (3)	$\wedge_x \mathfrak{a}(x)$? (3)
(4)	$\mathfrak{a}(n)$	m ?	$\not{?}$	$\mathfrak{a}(m)$
(5)		?		

En la línea (2), P puede elegir: en la subcolumna izquierda pide una justificación de $O(2)$, en la segunda responde con el consecuente. En la línea (3.1), O responde preceptivamente, P ataca $O(3.1)$ — y pierde en el caso de que O pueda responder en la línea (4) con $\mathfrak{a}(n)$. En la línea (3.2), O ataca la afirmación $P(2.2)$, P ha de responder atacando $O(3.2)$ — y pierde en el caso de que para el m escogido por O no pueda probar $\mathfrak{a}(m)$. P sólo ganaría con toda seguridad en el supuesto de conocer un n tal que O no pudiera probar $\mathfrak{a}(n)$, o bien estando en condiciones de probar él mismo $\mathfrak{a}(m)$ para todo m. Pero éste es un conocimiento que P sólo puede obtener a partir del contenido de $\mathfrak{a}(x)$, de modo que no puede hacer que prevalezca su afirmación basándose exclusivamente en la forma.

Como última posibilidad expresiva añadimos a lo anterior $\vee$ y $\wedge$ con las siguientes reglas:

$\vee$ no puede ser puesto en duda,
el que afirma $\wedge$, ha perdido.

La negación $\neg\,\mathfrak{a}$ puede, pues, ser sustituida por la condicional $\mathfrak{a} \rightarrow \wedge$. De acuerdo con nuestras convenciones, ambas proposiciones son usadas del mismo modo en el diálogo. La negación seguirá, no obstante, como yuntor autónomo.

El dominio de las fórmulas (formas proposicionales) a considerar en lógica efectiva comporta, pues:

(1) Fórmulas atómicas: $\vee, \wedge$
$a^0, b^0, \ldots$
$a^1x, b^1x, \ldots$
$a^2xy, b^2xy, \ldots$
$a^3xyz, \ldots$
.....

(Son símbolos de proposiciones y de formas proposicionales con una o varias variables objetuales.)

(2) Con dos fórmulas A y B cualesquiera, también $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$

(3) Con toda fórmula A, también $\neg A$

(4) Con toda fórmula A y toda variable objetual x, también $\wedge_x A$ y $\vee_x A$.

De todas estas fórmulas, en los diálogos sólo serán utilizadas las «cerradas», es decir, aquellas en las que no figure ninguna variable objetual libre. Toda variable objetual x que pueda presentarse se presentará, pues, bajo el dominio de un cuantificador $\wedge_x$ o $\vee_x$. Las fórmulas cerradas reciben asimismo el nombre de proposiciones, aunque no deben ser confundidas con las proposiciones precedentes, para las que nos hemos servido de las variables $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ A partir de la fórmula no cerrada $A(x_1, \ldots, x_r)$, y siendo $x_1, \ldots, x_r$ todas las variables libres en ella ocurrentes, es posible obtener nuevas fórmulas cerradas sustituyendo las «constantes» por variables. Con el fin de poder disponer de un

número suficiente de constantes de una vez para siempre, nos serviremos a este respecto de los números 1, 2, 3, ... (sin 0). De manera que $A(1, 2, \ldots, r)$ será, por ejemplo, una fórmula cerrada siempre que $A(x_1, \ldots, x_r)$ sea una fórmula en la que sólo figuren como variables libres $x_1, \ldots, x_r$.

Es preciso determinar ahora el uso de las formas proposicionales en el diálogo, de tal manera que corresponda al uso de cualesquiera proposiciones de esta forma. Bastará con precisar dicho uso respecto de las fórmulas atómicas cerradas, es decir, respecto de las proposiciones atómicas:

$a^0, b^0, \ldots$
$a^1 1, b^1 2, \ldots$
$a^2 12, b^2 23, \ldots$
$a^3 123, \ldots$
.....

Como la verdad lógica de una forma proposicional debe garantizar la posibilidad de imponer victoriosamente toda proposición de esta forma (frente a cualquier oponente), todo debe ocurrir del siguiente modo:

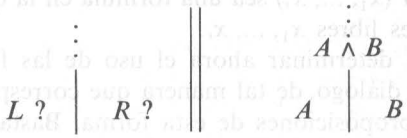
1) Si el oponente O afirma una fórmula atómica cerrada, el proponente P no puede ponerla en duda. (En algún caso determinado, O podría probarla.)
2) En el supuesto de que el proponente P tenga que defender una fórmula atómica cerrada posteriormente a la afirmación, por parte de O, de una fórmula semejante, ha ganado. (Podría justamente ocurrir que en un momento dado P no conociera la prueba de cualquier otra proposición atómica.)

Vamos a dar una visión de conjunto de todas las posibilidades existentes para una estrategia de ganancia. Para ello hay que distinguir dos casos respecto de cada una de las seis partículas lógicas ($\wedge$, $\vee$, $\wedge_x$, $\vee_x$, $\rightarrow$, $\neg$), según haya sido P u O quien las haya utilizado para alguna composición.

P ha afirmado $A \wedge B$:

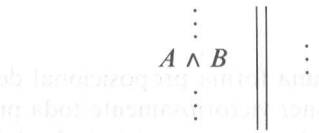
$(P\wedge)$ $\quad \vdots \;||\; \vdots \quad A \wedge B$

O tiene entonces dos posibilidades. Puede exigir que P afirme el miembro izquierdo o el derecho de la conjunción. De modo que la tabla se divide en dos:

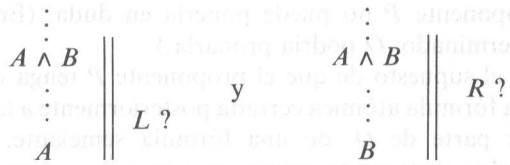


Si P conoce una estrategia de ganancia para cada una de las partes de la tabla, puede ganar el diálogo entero.

Supongamos ahora que O ha afirmado a lo largo del diálogo (eventualmente ya antes de la última línea) una fórmula $A \wedge B$:

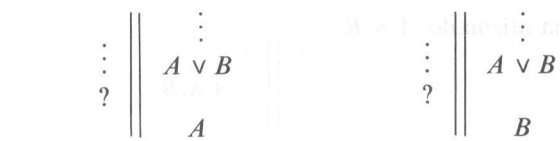


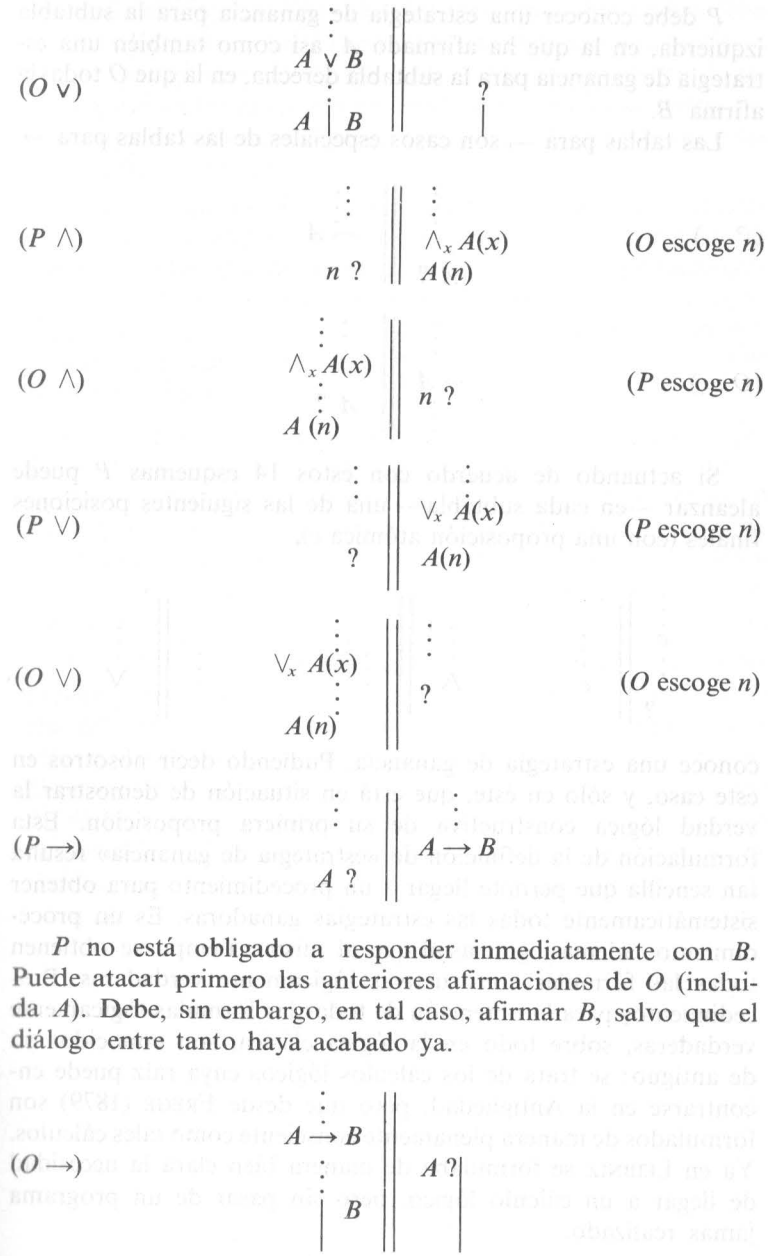
P tiene ahora dos posibilidades, a saber:



Si P conoce una estrategia de ganancia para una de estas dos tablas, está en condiciones de ganar el diálogo entero.

En el caso de las otras partículas lógicas, las posibles estrategias de ganancia han de ser aducidas de manera similar. Vamos a escribir únicamente la tabla, eventualmente también con subtablas.





P no está obligado a responder inmediatamente con B. Puede atacar primero las anteriores afirmaciones de O (incluida A). Debe, sin embargo, en tal caso, afirmar B, salvo que el diálogo entre tanto haya acabado ya.

P debe conocer una estrategia de ganancia para la subtabla izquierda, en la que ha afirmado *A*, así como también una estrategia de ganancia para la subtabla derecha, en la que *O* todavía afirma *B*.

Las tablas para $\neg$ son casos especiales de las tablas para $\rightarrow$.

$(P\neg)$

A ?	$\neg A$

$(O\neg)$

$\neg A$	A ?

Si actuando de acuerdo con estos 14 esquemas *P* puede alcanzar —en cada subtabla— una de las siguientes posiciones finales (con una proposición atómica *c*),

c … ?	c	
$\wedge$		
		$\vee$

conoce una estrategia de ganancia. Pudiendo decir nosotros en este caso, y sólo en éste, que está en situación de demostrar la verdad lógica constructiva de su primera proposición. Esta formulación de la definición de «estrategia de ganancia» resulta tan sencilla que permite llegar a un procedimiento para obtener sistemáticamente todas las estrategias ganadoras. Es un procedimiento, además, gracias al que al mismo tiempo se obtienen todas las fórmulas constructivas lógicamente verdaderas. Procedimientos para la obtención de todas las fórmulas lógicamente verdaderas, sobre todo en la lógica clásica, son conocidos ya de antiguo: se trata de los cálculos lógicos cuya raíz puede encontrarse en la Antigüedad, pero que desde FREGE (1879) son formulados de manera plenamente consciente como tales cálculos. Ya en LEIBNIZ se formulaba de manera bien clara la necesidad de llegar a un cálculo lógico, pero sin pasar de un programa jamás realizado.

Un cálculo es, dicho de manera general, un procedimiento para la obtención de fórmulas (figuras), que sólo trabaja con reglas esquemáticas. En el capítulo III ofreceremos una precisión tal del concepto de cálculo que pueda llegar a ser objeto de investigación matemática. De momento no necesitamos teoría general alguna del cálculo, ya que tenemos sólo que habérnoslas con cálculos especiales.

Si nos proponemos la tarea de obtener todas las fórmulas lógicamente verdaderas de acuerdo con un procedimiento esquemático, el criterio de la existencia de una estrategia de ganancia nos será útil en la medida en que procuremos ir construyendo todas las estrategias una detrás de otra y de abajo hacia arriba. Esta correspondencia entre cálculo y tabla fue hecha notar por BETH (1955) por vez primera.

Hemos dado ya las posiciones finales de todas las estrategias de ganancia. Leídos de abajo arriba, los 14 esquemas $(P\wedge)$ a $(O\neg)$ muestran las posibilidades existentes para aumentar en una línea la parte final de una estrategia. (Se llega a la cifra de 14 dado que a cada una de las 6 partículas lógicas le corresponden, por regla general, dos esquemas, uno para *P* y otro para *O;* sólo a las partículas $\vee$ y $\wedge$ les corresponden tres esquemas.)

En cada línea de una tabla, o subtabla, todas las afirmaciones hechas por el oponente *O* entran en consideración para la marcha del diálogo, en tanto que de las hechas por el proponente *P* sólo resulta relevante la última sostenida, en cada caso, por él. Después de cada línea puede, pues, ser descrito el «estado» del diálogo con sólo indicar todas las tesis sostenidas por *O* hasta el momento, y la última de las sostenidas por *P*, de la siguiente forma, por ejemplo:

$$A_1, A_2, \ldots, A_r \,||\, B$$

Una figura de este tipo es lo que desde GENTZEN (1934) recibe el nombre de secuencia. A la izquierda de || hay una sucesión finita, eventualmente vacía, de fórmulas. Como variable para estas sucesiones utilizamos *F*, ...

Las posiciones finales de una estrategia de ganancia corresponden, pues, a las siguientes secuencias:

$$F(c) \;||\; c$$
$$F(\wedge) \;||\; B$$
$$F \;||\; \vee$$

donde $F(c)$ o $F(\wedge)$ significan una sucesión en la que aparece, respectivamente, c o $\wedge$.

Los 14 esquemas $(P\wedge)$—$(O\neg)$ pueden ser considerados como reglas que de estas secuencias, a las que damos el nombre de secuencias básicas, nos permiten obtener nuevas secuencias. El signo $\Rightarrow$ sirve para indicar las reglas. Las «premisas» de las reglas son separadas por doble coma.

He aquí las 14 reglas así obtenidas para las secuencias:

$(P\wedge)$ $F \,||\, A,, F \,||\, B \Rightarrow F \,||\, A \wedge B$

$(O\wedge)$ $F(A \wedge B), A \,||\, C \Rightarrow (A \wedge B) \,||\, C$
$F(A \wedge B), B \,||\, C \Rightarrow F(A \wedge B) \,||\, C$

$(P\wedge)$ $F \,||\, A \Rightarrow F \,||\, A \vee B$
$F \,||\, B \Rightarrow F \,||\, A \vee B$

$(O\vee)$ $F(A \vee B), A \,||\, C,, F(A \vee B), B \,||\, C \Rightarrow F(A \vee B) \,||\, C$

$(P\rightarrow)$ $F, A \,||\, B \Rightarrow F \,||\, A \rightarrow B$

$(O\rightarrow)$ $F(A \rightarrow B) \,||\, A,, F(A \rightarrow B), B \,||\, C \Rightarrow F(A \rightarrow B) \,||\, C$

$(P\neg)$ $F, A \,||\, \wedge \Rightarrow F \,||\, \neg A$

$(O\neg)$ $F(\neg A) \,||\, A \Rightarrow F(\neg A) \,||\, C$

$(P\,\wedge)$ $F \,||\, A(n) \Rightarrow F \,||\, \wedge_x A(x)$

si n es una constante que no figura en F ni en $\wedge_x A(x)$.

$(O\,\wedge)$ $F(\wedge_x A(x)), A(n) \,||\, C \Rightarrow F(\wedge_x A(x)) \,||\, C$

$(P\vee)$ $F \,||\, A(n) \Rightarrow F \,||\, \vee_x A(x)$

$(O\vee)$ $F(\vee_x A(x)), A(n) \,||\, C \Rightarrow F(V_x A(x)) \,||\, C$

si n es una constante que no figura en $F(\vee_x A(x))$ ni en C.

Las condiciones respecto de n que aparecen en las reglas $(P\,\wedge)$ y $(O\,\vee)$ se deben a que en el diálogo O puede elegir en estos casos una constante n. La elección no favorable para P es

la elección de una constante que, hasta el momento, aún no ha aparecido.

El cálculo secuencial que acabamos de descubrir, y al que hemos llegado a partir de una interpretación «operativa» de las partículas lógicas (consúltese, a este respecto, LORENZEN, 1955), fue desarrollado por vez primera por GENTZEN, en 1934, y sin interpretación alguna, por el sólo «carácter natural» de las reglas. GENTZEN ha demostrado que su cálculo permite derivar exactamente las mismas fórmulas que las derivadas del cálculo construido por HEYTING, en 1930, para la formalización de la lógica intuicionista. Es decir, que nuestro concepto de verdad lógica constructiva y el concepto intuicionista de verdad lógica (en la precisión del mismo debida a HEYTING) coinciden exactamente.

La lógica así obtenida se diferencia de la lógica clásica de yuntores en un doble aspecto:

1) Se ocupa no sólo de las proposiciones (o enunciados)[7] compuestas a base de yuntores, sino también de las obtenidas con la ayuda de cuantificadores. De ahí que pueda recibir el nombre de lógica de cuantificadores.

2) Supera las reglas clásicas de la lógica de yuntores en la medida en que no se limita a proposiciones v-definidas. La adjunción, el condicional y, sobre todo, la negación, son utilizados en sentido constructivo. Por eso se llama «lógica constructiva de cuantificadores».

El cálculo secuencial de la lógica constructiva de cuantificadores no nos proporciona únicamente las fórmulas lógicamente verdaderas en sentido constructivo, ya que a través de este cálculo obtenemos no sólo secuencias $F \,||\, A$ con un F vacío, sino también con

[7] Aunque algunos autores subrayan la conveniencia de referirse en el contexto de la lógica a «enunciados» como los objetos de que se ocupa ésta —*vid.*, p. ej., Benson MATES, *Lógica matemática elemental*, trad. cast. de Carmen García-Trevijano, Editorial Tecnos, S. A., Madrid, 1970, págs. 23-24— y no a «proposiciones», distinguiendo así cuidadosamente entre unos y otras (los primeros vendrían a corresponder al plano de la *expresión* y las segundas al del *pensamiento*), en la presente obra, y dado que en la bibliografía lógica actualmente disponible en lengua castellana, dicha distinción —cuya pertinencia, por otra parte, parece fuera de duda— aún no se ha implantado, y el término «proposición» ocurre con frecuencia, traducimos *Aussage* indistintamente por «proposición» y «enunciado» *(N. del T.)*

un F no vacío. Si $A_1, ..., A_r \,||\, B$ es derivable en el cálculo secuencial, el proponente P podrá defender la afirmación B contra todo oponente O, el cual a su vez estará dispuesto a defender las afirmaciones $A_1, ..., A_r$. De ahí que digamos, pues, que de las premisas $A_1, ..., A_r$ puede llegarse lógicamente, y de manera constructiva, a la conclusión B. De este modo hemos definido igualmente lo que es, en la lógica constructiva, una inferencia lógica.

En lugar de tener que buscar para la demostración de la validez constructiva de una inferencia lógica de B a partir de $A_1, ..., A_r$ una estrategia ganadora para un diálogo cuya posición inicial sea $A_1, ..., A_r \,||\, B$, se tratará ahora más bien de derivar esta secuencia a partir de unas secuencias básicas adecuadas, es decir, procediendo paso a paso y de acuerdo con las 14 reglas $(P\wedge) - (O\vee)$.

Examinemos este punto con la ayuda de un ejemplo:

$$a \to b \,||\, \neg b \to \neg a$$

La tabla de una estrategia ganadora se presenta del siguiente modo:

(1)	$a \to b$	$\|\|$	$\neg b \to \neg a$	
(2)	$\neg b$	$\|\|$	$\neg a$	
(3)	a	$\|\|$	a	? (1)
(4)	↯ | b	$\|\|$	b	? (2)

La marcha del diálogo es descrita por las siguientes secuencias:

$$a \to b \,||\, \neg b \to \neg a$$
$$a \to b, \neg b \,||\, \neg a$$
$$a \to b, \neg b, a \,||\, \wedge$$
$$a \to b, \neg b, a \,||\, a \qquad a \to b, \neg b, a, b \,||\, \wedge$$
$$a \to b, \neg b, a, b \,||\, b$$

Leyendo de abajo hacia arriba obtenemos una derivación en el cálculo secuencial que —ordenada por líneas— puede ser escrita como sigue:

(1)	$a \to b, \neg b, a \,\|\| \, a$	
(2)	$a \to b, \neg b, a, b \,\|\| \, b$	
(3)	$a \to b, \neg b, a, b \,\|\| \, \wedge$	$O\ \neg\ (2)$
(4)	$a \to b, \neg b, a \,\|\| \, \wedge$	$O \to (1)\ (3)$
(5)	$a \to b, \neg b \,\|\| \, \neg a$	$P\ \neg\ (4)$
(6)	$a \to b \,\|\| \neg b \to \neg a$	$P \to (5)$

Una derivación en el cálculo secuencial no es una inferencia lógica, sino un modo de operar esquemático con vistas a la obtención de secuencias que sólo a su vez equivalen a conclusiones lógicas. En todo caso, existe una estrecha relación entre la inferencia lógica y la derivación en el cálculo secuencial. Esta conexión es formulada en el llamado «teorema de la deducción». A este respecto se utiliza la noción de la derivabilidad relativa en el cálculo secuencial. Si a las secuencias básicas del cálculo secuencial se añaden ciertas secuencias $S_1, S_2, ...$, y del cálculo así extendido es derivable una secuencia S, entonces se dice que en el cálculo secuencial S es (relativamente) derivable a partir de $S_1, S_2, ...$

Teorema de la deducción: Si $\,||\, B$ es derivable en el cálculo secuencial a partir de $\,||\, A_1, ..., \,||\, A_r$ entonces $A_1, ..., A_r \,||\, B$ es derivable (absolutamente) en el cálculo secuencial.

Para la prueba basta con transformar una derivación relativa de $\,||\, B$ a partir de $\,||\, A_1, ..., \,||\, A_r$, de tal manera que toda secuencia $F \,||\, C$ que pueda presentarse sea reemplazada por $A_1, ..., A_r, F \,||\, C$. Cambiando eventualmente las constantes se obtiene así —como se desprende inmediatamente de las reglas del cálculo secuencial— una derivación de $A_1, ..., A_r \,||\, B$ a partir de las secuencias siguientes: $A_1, ..., A_r \,||\, A_1,, A_1, ..., A_r \,||\, A_2,, ..., A_1, ..., A_r \,||\, A_r$. Bastará, pues, con mostrar que estas secuencias son (absolutamente) derivables, esto es, que $F(A) \,||\, A$ resulta derivable en el cálculo secuencial para toda fórmula A.

Vamos a formularlo como un

Lema auxiliar: $F(A) \,||\, A$ es derivable.

Prueba: $F(A) \,||\, A$ es una secuencia básica para las fórmulas atómicas A. Si admitimos esta afirmación como ya probada respecto de todas las subfórmulas de A, efectuando una inducción a partir de dichas subfórmulas, el lema queda establecido de manera general. Hay que distinguir los casos en los que A ha sido compuesta de una de las maneras siguientes: $A_1 \wedge A_2$, $A_1 \vee A_2$, $A_1 \to A_2$, $\neg A_0$, $\wedge_x A_0(x)$, $\vee_x A_0(x)$. En el primer caso, resulta $F(A_1 \wedge A_2) \,||\, A_1$ y $F(A_1 \wedge A_2) \,||\, A_2$. Estas secuencias son, a su vez, derivables, ya que —por la hipótesis de la inducción— $F(A_1 \wedge A_2), A_1 \,||\, A_1$ y $F(A_1 \wedge A_2), A_2 \,||\, A_2$ son derivables. $F(\neg A_0) \,||\, \neg A_0$ puede ser derivada a partir de $F(\neg A_0), A_0 \,||\, A_0$ a través de $F(\neg A_0), A_0 \,||\, \wedge$. A su vez, $F(\wedge_x A_0(x)) \,||\, \wedge_x A_0(x)$ es de-

rivable a través de $F(\wedge_x A_0(x)) \,||\, A_0(n)$ —con un n que en otro caso no aparece— a partir de $F(\wedge_x A_0(x)), A_0(n) \,||\, A_0(n)$.

Los otros casos han de ser tratados de manera análoga.

Quedan así probados el lema auxiliar y el teorema de la deducción.

Si es posible deducir lógicamente y de manera constructiva una fórmula B de una fórmula A, diremos que la fórmula A implica lógica y constructivamente la fórmula B. Para esta implicación escribiremos de nuevo $A < B$. Resulta inmediatamente evidente que el paso de varias premisas $A_1, ..., A_2$ a B es una inferencia lógica si y sólo si la fórmula de la conjunción $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_r$ implica lógicamente la fórmula B. En lugar de secuencias basta, pues, con limitarse a considerar implicaciones.

Resulta posible, respecto de estas implicaciones, la construcción de un cálculo de implicaciones formalmente más simple que el secuencial. La bibliografía ofrece, por regla general, cálculos construidos de acuerdo con el modelo de FREGE, que tienen fórmulas lógicamente verdaderas como figuras derivables. Cálculos que, en lo esencial, son, de todos modos, equivalentes. De ahí que no nos detengamos ahora en las diversas posibilidades existentes, dado, sobre todo, que en el próximo parágrafo, y con el fin de llegar a una lógica clásica de cuantificadores, comenzaremos por formular un cálculo de implicaciones para la lógica clásica de yuntores.

§ 3. LÓGICA CLÁSICA DE CUANTIFICADORES

La lógica clásica de cuantificadores surgió en la segunda mitad del siglo XIX, gracias, en particular, a la obra de FREGE (1879), y como fruto de la fusión de la silogística aristotélica y la lógica clásica de yuntores de los antiguos y de la Escolástica, redescubierta por BOOLE (1847). Esta lógica puede ser obtenida trasladando formalmente los presupuestos de la lógica clásica de yuntores a la de cuantificadores, sin necesidad de volver a considerar ahora las razones expuestas en el § 2, contrarias a este procedimiento, y que nos han conducido a la lógica constructiva.

Se trata de buscar, en primer lugar, un cálculo para la obtención de todas las fórmulas de implicación $A < B$, tales que, de

acuerdo con la lógica clásica de yuntores, A implique lógicamente B. A favor de la brevedad daremos a estas fórmulas de implicación el nombre de «implicaciones», diciendo que una implicación de este tipo $A < B$, será constructiva o clásicamente válida, según A implique lógicamente, de manera constructiva o clásica, B. La tarea de buscar un cálculo de implicaciones no admite, evidentemente, una solución unívoca determinada. Con el fin de evitar cualquier posible arbitrariedad, preferimos orientarnos de acuerdo con el cálculo secuencial constructivo, limitándonos así a los yuntores $\wedge$, $\vee$, $\neg$, los únicos importantes para la lógica clásica.

Las secuencias tenían la forma $F \,||\, C$, en donde F significa una sucesión, eventualmente vacía, de fórmulas $A_1, ..., A_r$. Para obtener implicaciones sustituimos $A_1, ..., A_r$ por la conjunción $A_1 \wedge ... \wedge A_r$. Convenimos a este respecto que el orden de sucesión y la asociación de los miembros de la conjunción múltiple carecen de importancia. P. ej.: $A_1 \wedge A_2 \dot{\wedge} A_3$ y $A_2 \dot{\wedge} A_1 \wedge A_3$ son considerados como «iguales en lo esencial». Una sucesión vacía F puede ser sustuida por $\vee \cdot \vee$ y las fórmulas $A_1 \wedge ... \wedge A_r$, en donde las fórmulas $A_1, ..., A_r$ ya no son conjunciones ellas mismas, reciben el nombre de fórmulas conjuntivas, siendo $\vee$ o $A_1, ..., A_r$ los miembros de la fórmula conjuntiva.

Si utilizamos ahora F como variable para estas fórmulas conjuntivas obtenemos las siguientes implicaciones básicas a partir de las secuencias básicas del cálculo secuencial:

$$F \wedge c < c$$
$$F \wedge \wedge < C$$
$$F < \vee$$

Tampoco aquí importa la sucesión ni el orden asociativo en las fórmulas conjuntivas de la izquierda. F puede ser, asimismo, vacía. Implicaciones básicas serán, pues, también:

$$A \wedge c \wedge B < c$$

y

$$\wedge < C$$

Si vertemos ahora las reglas para $\wedge$, $\vee$, y $\neg$ del cálculo secuencial a implicaciones, bastará con tomar para $\wedge$ la regla

$$F < A_1, F < B \Rightarrow F < A \wedge B$$

puesto que la superfluidad de las otras dos reglas, en lo esencial iguales,

$$F \wedge A < C \Rightarrow F \wedge A \wedge B < C$$
$$F \wedge B < C \Rightarrow F \wedge A \wedge B < C$$

resulta probada.

Respecto de $\vee$, las reglas del cálculo secuencial dan las siguientes reglas:

$$F < A \Rightarrow F < A \vee B$$
$$F < B \Rightarrow F < A \vee B$$
$$F \wedge A < C,, F \wedge B < C \Rightarrow F \wedge A \vee B < C$$

Para simplificar se ha dejado a un lado en este punto el supuesto según el cual $A \vee B$ figura en F como miembro de la conjunción, cosa que, como es evidente, para nada influye en la validez.

Una simplificación similar da, respecto de $\neg$:

$$F \wedge A < \bigwedge \Rightarrow F < \neg A$$
$$F < A \Rightarrow F \wedge \neg A < C$$

Este cálculo de la lógica constructiva de yuntores (sin $\rightarrow$) no ofrece, por supuesto, sino implicaciones que también son clásicamente válidas. En efecto, si una fórmula de implicación $A < B$ puede ser interpretada a base de valores veritativos de tal modo que siendo A verdadera, B sea falsa, el oponente podrá ganar fácilmente en un diálogo en el que a la vez que el proponente afirme B, él afirme A. Por el contrario, el cálculo de implicaciones expuesto no procura la obtención de *todas* las implicaciones clásicamente válidas, no procura, p. ej., con toda seguridad $\bigvee < a \vee \neg a$, ya que esta implicación no es constructivamente válida.

Se tiene una posibilidad de llegar a nuevas reglas de cálculo, todavía válidas, igualmente, para un cálculo clásico, aprovechando la simetría («dualidad») que en la lógica clásica de yuntores existe entre $\wedge$ y $\vee$. Si al interpretar una fórmula en términos de valores de verdad se cambian siempre $\bigvee$ y $\bigwedge$, y a la vez también $\wedge$ y $\vee$, la fórmula obtendrá el valor de verdad opuesto. Sobre todo: si $A < B$ es válido en sentido clásico, entonces también lo es $B' < A'$, si A' o B' se derivan, respectivamente, de A o B al efectuar el cambio de $\wedge$ y $\vee$.

Esta reflexión conduce a un cálculo implicacional que corresponde al cálculo secuencial de GENTZEN para la lógica clásica. Para introducir íntegramente la simetría (o «dualidad», como también se la llama), se utilizan, junto a las fórmulas conjuntivas F, que aparecían a la izquierda de $<$, también las fórmulas G de adjunción, que han de aparecer a la derecha de $<$. En estas fórmulas adjuntivas $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_r$, el orden de sucesión y la asociación tampoco importan. $\bigwedge$ representa la fórmula adjuntiva vacía. Llamaremos brevemente a los miembros de F «antecedente», y a los de G, «consecuente».

A partir de todas estas convenciones construimos el siguiente cálculo clásico de yuntores. Las implicaciones básicas son ahora:

$$\text{(G)} \quad \begin{cases} F \wedge c < c \vee G \\ F \wedge \bigwedge < G \\ F < \bigvee \vee G \end{cases}$$

Sus reglas:

$$\text{(J)} \quad \begin{cases} F < A \vee G,, F < B \vee G \Rightarrow F < A \wedge B \vee G \\ F \wedge A < G,, F \wedge B < G \Rightarrow F \wedge A \vee B < G \\ F \wedge A < G \Rightarrow F < \neg A \vee G \\ F < A \vee G \Rightarrow F \wedge \neg A < G \end{cases}$$

Una característica de este cálculo es que sus reglas pueden invertirse; las inversiones, p. ej.:

$$F < A \wedge B \vee G \Rightarrow F < A \vee G$$
$$F < \neg A \vee G \Rightarrow F \wedge A < G$$

son *admisibles*, es decir, que de implicaciones válidas conducen siempre de nuevo a otras implicaciones válidas. Sobre la base de esta característica puede ser fácilmente mostrada la comple-

titud del cálculo, es decir, la posibilidad de derivar *todas* las implicaciones clásicamente válidas. Si una implicación clásicamente válida tiene la forma «primitiva»

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots < b_1 \vee b_2 \vee \ldots$$

con símbolos proposicionales, es decir, con las fórmulas $\vee$, $\wedge$ a derecha e izquierda, entonces deberá: 1) haber a la derecha un $\wedge$, o 2) haber a la derecha un $\vee$, o 3) coincidir uno de los $a\mu$ a la izquierda con otro de los b_ν a la derecha. En otro caso, puede ser aducido inmediatamente un modelo para la fórmula izquierda que no sea modelo para la fórmula derecha. Todas estas implicaciones primitivas son, de acuerdo con (G), implicaciones básicas. Si una implicación no es primitiva tendrá una de las formas siguientes:

$$F < A \wedge B \dot{\vee} G$$
o $$F \dot{\wedge} A \vee B < G$$
o $$F < \neg A \vee G$$
o $$F \wedge \neg A < G$$

Unicamente en estos casos no figura a la derecha sólo $\vee$ ni a la izquierda sólo $\wedge$.

Para derivar estas implicaciones válidas, sin embargo, basta con nuestras reglas (J). Las implicaciones a la izquierda de $\Rightarrow$ son implicaciones válidas en estas reglas si la implicación a la derecha de $\Rightarrow$ también es válida. Las implicaciones a la izquierda de $\Rightarrow$ reciben en estas reglas bien un $\neg$ menos, un $\wedge$ menos a la derecha de $<$, bien un $\vee$ menos a la izquierda de $<$. Al cabo de un número finito de pasos se ha llegado a una serie de implicaciones primitivas válidas. La completitud ha quedado así probada.

Puesto que ya sabemos que no todas las implicaciones válidas en sentido clásico lo son a la vez en sentido constructivo, y puesto que evidentemente las implicaciones básicas (G) son constructivamente válidas, una, al menos, de nuestras reglas (J) no habrá de ser admisible en el cálculo de la lógica constructiva de yuntores, es decir, que no conducirá siempre de unas implicaciones

constructivamente válidas a otras igualmente válidas en sentido constructivo. Existe exactamente esta misma regla, a saber:

$$F \wedge A < G \Rightarrow F < \neg A \vee G$$

Regla que sólo resulta admisible en el cálculo constructivo si se sustituye G por $\wedge$:

$$A \wedge B < \wedge \Rightarrow A < \neg B,$$

pero no un G cualquiera. Así, p. ej., $\vee \wedge b < b$ es constructivamente válida, pero no $\vee < \neg b \vee b$.

La lógica clásica de yuntores resulta, pues, de la adición de una regla ulterior al cálculo constructivo de yuntores: es una extensión de este cálculo. Pero hay que tener en cuenta, de todos modos, que esta extensión clásica viene ya unívocamente determinada por la lógica constructiva: la lógica clásica de yuntores es la mayor extensión consistente imaginable de la lógica constructiva de yuntores. Lo que más exactamente quiere decir que una forma proposicional A, respecto de la cual $\vee < A$ puede ser añadida al cálculo constructivo como implicación básica sin que por ello $\vee < \wedge$ resulte derivable, ha de ser lógicamente verdadera en sentido clásico.

Si A no fuera lógicamente verdadera en sentido clásico, habría una interpretación según la cual A adoptaría el valor $\wedge$. Por sustitución surgiría, pues, de A una fórmula A' formada exclusivamente a base de $\vee$, $\wedge$, para la que en sentido clásico valdría $A' \asymp \wedge$. Las tablas de verdad clásicas pueden ser, sin embargo, fácilmente probadas como equivalencias lógicas constructivas, p. ej.:

$$\vee \wedge \vee \asymp \vee \qquad \vee \vee \wedge \asymp \vee \qquad \neg \vee \asymp \wedge$$
$$\vee \wedge \wedge \asymp \wedge \qquad \wedge \vee \wedge \asymp \wedge$$

Con la ayuda de la transitividad de $<$ (comp., en este sentido, con los §§ 6 y 7), de la implicación básica $\vee < A'$ se deduciría inmediatamente la derivabilidad de $\vee < \wedge$.

Regresemos ahora al cálculo secuencial constructivo expuesto en el § 2 y convirtamos sus reglas para los cuantificadores

en reglas para las implicaciones. Nos limitaremos a fórmulas sin constantes. En las reglas del cálculo secuencial estas constantes han de ser sustituidas por variables objetuales libres. Las condiciones suplementarias para n en $(P_{\wedge})$ y $(O_{\vee})$ se convierten así en condiciones de variables determinadas, de cuya exacta formulación no nos ocupamos aquí (comp. § 6). Obtenemos así el siguiente sistema de reglas:

$$F < A(y) \Rightarrow F < \wedge_x A(x)$$
(Condición de variable para y)
$$F \wedge \wedge_x A(x) \wedge A(y) < C \Rightarrow F \wedge \wedge_x A(x) < C$$
$$F < A(y) \Rightarrow F < \vee_x A(x)$$
$$F \wedge \vee_x A(x) \wedge A(y) < C \Rightarrow F \wedge \wedge_x A(x) < C$$
(Condición de variable para y)

Extendiendo ahora a los cuantificadores $\wedge_x$ y $\vee_x$ la dualidad de la lógica clásica de yuntores entre $\wedge$ y $\vee$ —sin entrar, de todos modos, en una justificación en orden a los contenidos—, llegamos (no sin una ligera modificación) a las reglas siguientes:

(Q)
$$F < A(y) \vee G \Rightarrow F < \wedge_x A(x) \vee G$$
(Condición de variable para y)
$$F \wedge \wedge_x A(x) \wedge A(y) < G \Rightarrow F \wedge \wedge_x A(x) < G$$
$$F \wedge A(y) < G \Rightarrow F \wedge \vee_x A(x) < G$$
(Condición de variable para y)
$$F < A(y) \vee \vee_x A(x) \vee G \Rightarrow F < \vee_x A(x) \vee G$$

En la segunda y cuarta de estas reglas (carentes de cualquier posible analogía en el cálculo clásico de yuntores) hemos conservado los miembros $\wedge_x A(x)$ o $\vee_x A(x)$ en las implicaciones a la izquierda de $\Rightarrow$, con el fin de que las inversiones de estas reglas puedan resultar admisibles. Todas las inversiones resultan admisibles incluso para la lógica constructiva de cuantificadores

es decir, conducen de implicaciones constructivamente válidas a otras semejantes. De las reglas en sí, sólo la primera no es constructivamente admisible. Para ello, G tendría que limitarse de nuevo a la fórmula adjuntiva vacía:

$$F < A(y) \Rightarrow F < \wedge_x A(x)$$

Así, p. ej., $\wedge_x . a \vee b(x) . < a \vee b(y)$ es constructivamente válida, pero $\wedge_x \cdot a \vee b(x) \cdot < a \vee \wedge_x b(x)$ no lo es.

Hemos llegado, en resumen, a un cálculo con (G) como implicaciones básicas válidas y (J) y (Q) como reglas. Damos a este cálculo el nombre de cálculo clásico de cuantificadores. Ha sido obtenido a base de una simetrización (dualización) de reglas tomadas de la lógica clásica de yuntores para la lógica constructiva. Contrariamente a lo que ocurre con la lógica clásica de yuntores, y también con la lógica efectiva de cuantificadores, no hay, en principio, ninguna interpretación disponible para la justificación de este cálculo.

No es difícil ver, p. ej., que la implicación

$$\neg \wedge_x a(x) < \vee_x \neg a(x)$$

es derivable en la lógica clásica de cuantificadores. Pero en lo tocante a la «validez» de esta implicación no es posible apelar ni a los valores de verdad de proposiciones v-definidas, ni a la existencia de una estrategia ganadora. (Aunque proposiciones de la forma $A \vee \neg A$ resulten admisibles como premisas, suplementariamente, todas las implicaciones válidas en sentido clásico pueden ser ganadas dialógicamente.) A menudo se apela a un «sentimiento natural del lenguaje» al cual la proposición «si $a(x)$ no vale para todo x, entonces para algún x no vale $a(x)$» ha de revelársele inmediatamente como «verdadera». Pero esta apelación a los lenguajes naturales no es, matemáticamente hablando, muy convincente. Una de las tareas más importantes de la metamatemática radica precisamente en la justificación de la lógica clásica de cuantificadores —tarea para la que no ha de servir como fundamento el lenguaje natural, sino sólo la matemática constructiva, incluida la lógica constructiva de cuantificadores.

La tarea así propuesta recibe, sobre todo, el nombre de prueba

de consistencia. A ella está dedicado el capítulo II. Intentaremos hacer ver en él que en toda teoría constructiva las reglas del cálculo clásico de cuantificadores pueden ser utilizadas en lugar de las reglas de la lógica constructiva, sin que por ello aparezca contradicción, es decir, sin que para una fórmula A puedan a la vez probarse A y $\neg A$. Con el fin de que esta tarea no resulte infinita, la expresión «teoría constructiva» habrá de ser entendida de tal modo que sólo sean tomadas en cuenta aquellas teorías a las que resulte posible tratar en el seno de la aritmética constructiva. La aritmética juega así el papel de representante de la matemática constructiva, y la consistencia de la lógica clásica de cuantificadores es expresada como la consistencia misma de la aritmética clásica.

Antes de entrar más detenidamente en ello hemos de examinar brevemente en el § 4 la lógica de la igualdad. Tomemos nota todavía, como medida de precaución, de que el método de interpretación a base de valores de verdad no puede ser extendido sin más de la lógica clásica de yuntores a la lógica clásica de cuantificadores. Una fórmula básica $a(x)$, p. ej., no puede ser interpretada a base de $\vee$ o $\wedge$, sino que para toda constante n, es $a(n)$ quien ha de ser interpretada a base de $\vee$ o $\wedge$. El símbolo central a de la fórmula $a(x)$ ha de ser, pues, interpretado por una función (*vid.* § 4), que a todo argumento constante haga corresponder el valor $\vee$ o $\wedge$. En el caso de un número infinito de constantes —limitarse a un número finito sería arbitrario y llevaría a una limitación a la lógica de yuntores— el valor de una fórmula compuesta ya no es decidible. ¿Cómo saber, p. ej., que $\wedge_x a(x) \vee \vee_x \neg a(x)$ tomará, para toda interpretación, el valor $\vee$? Si se responde que será así «porque $a(n)$ toma para todo n el valor $\vee$ o para un solo n toma el valor $\wedge$», no se habrá hecho otra cosa que repetir la afirmación. En el seno de una teoría axiomática de las interpretaciones (semántica), de la que se sirve la lógica clásica de cuantificadores, podría, desde luego, darse esa respuesta. Pero quedaría en pie el problema de la consistencia de dicha teoría axiomática. La generalización, por otra parte, de la prueba de la completitud del cálculo clásico de yuntores al cálculo clásico de cuantificadores (GÖDEL, 1930: toda fórmula clásicamente válida es derivable) no puede ser acometida sino dentro de una metateoría que contenga la lógica clásica. Volveremos a ello en el capítulo IV.

§ 4. LÓGICA DE LA IGUALDAD

Toda utilización de símbolos, bien en el lenguaje natural, bien en la matemática, se sirve de tal manera de ellos que cada uno de estos símbolos puede ser reproducido cuantas veces se desee y reconocido fácilmente. La mención particular del símbolo no entra en juego. Que una proposición científica, p. ej., sea enunciada en voz alta o baja es algo de lo que no depende su consideración como tal proposición científica. Cuando se trata de reglas para operar con figuras, esto es, con composiciones de símbolos, tampoco entra en juego la mención individual de los símbolos y su composición; importa, sobre todo, llegar a saber prácticamente lo importante, es decir, la posibilidad de reconocer la figura como surgida precisamente de tal composición y a base de precisamente tales símbolos. Una reflexión en torno a si dos menciones particulares son «iguales», es decir, en torno a si ambas son menciones particulares de la misma figura (no se considere erróneamente esta aclaración dentro del lenguaje natural como muestra de un dogmático realismo), no es necesaria en casos sencillos de uso de los símbolos.

Ahora bien, cuando se introducen en la aritmética operaciones como la multiplicación, p. ej., en las que se enuncian reglas para «calcular» productos y se anotan los resultados en la forma

$$\frac{m \cdot n}{p} \ (m \text{ por } n \text{ da } p)$$

resulta por lo menos muy deseable tener una posibilidad de poder expresar el carácter «unívoco» del resultado en forma de una regla:

$$\frac{m \cdot n}{p}, \frac{m \cdot n}{q} \Rightarrow p = q$$

en donde $p = q$ significa la igualdad de los símbolos numéricos que han sido sustituidos por las variables p y q.

Notaciones como $m \cdot n = p$, e incluso teoremas del tipo $m \cdot n = n \cdot m$ constituyen generalizaciones cuyo sentido fundamental y justificación (sin entrar en las operaciones particulares de, p. ej., la aritmética) es lo que va a ser estudiado aquí bajo el rótulo de lógica de la igualdad.

La regla según la cual proposiciones como $A(x)$ y $A(y)$, que resultan la una de la otra por sustitución de x por una misma figura y, son de validez equivalente, es decir, que $A(x)$ puede ser afirmada si y sólo si $A(y)$ puede ser afirmada también, es una regla que, formulada aquí primero en lenguaje natural, puede ser analizada como una regla de metanivel, es decir, como la regla que permite pasar de la proposición $x = y$ a las reglas:

$$A(x) \Rightarrow A(y)$$
$$A(y) \Rightarrow A(x)$$

Fundimos ambas reglas en

$$A(x) \Leftrightarrow A(y)$$

y obtenemos como metarregla

$$x = y \doteqdot A(x) \Leftrightarrow A(y)$$

Pero como disponemos ya de la lógica (es decir, de una teoría de las composiciones a base de partículas lógicas), podemos formular, en lugar de esta metarregla, una proposición en el nivel de $A(x)$ y $A(y)$. Que dice así:

$$x = y \dot{\rightarrow} A(x) \leftrightarrow A(y)$$

Donde, junto al condicional $\rightarrow$ hemos utilizado el bicondicional $\leftrightarrow$, que viene definido por

$$a \leftrightarrow b \leftrightharpoons a \rightarrow b \wedge b \rightarrow a$$

La posibilidad de pasar de un metanivel al nivel inferior, el nivel objetual, descansa, naturalmente, en la determinación de no considerar las conexiones de proposiciones con la ayuda de partículas lógicas como un nivel más alto. Aunque la interpretación operativa del condicional $\rightarrow$ podría justificar un aumento de nivel, dado que la igualdad de niveles es admitida por la lógica clásica, la conservaremos también para la lógica constructiva.

Queda todavía por definir la igualdad en cuanto a tal. Habrá de ser determinado cuando son iguales dos símbolos. Lo que

no es sino el problema de su reconocimiento en la práctica. Teóricamente sólo puede determinarse la validez de $x = x$ (leído generalmente así: todo objeto es igual a sí mismo).

En el caso de la aritmética, p. ej., la igualdad puede ser definida respecto de los símbolos numéricos |, ||, |||, ..., determinando que:

$$|=|$$
$$x = y \rightarrow x| = y|$$

De donde la ecuación general

$$x = x$$

podrá ser probada por inducción. (Véase el cap. II.)

Ahora bien, en la medida en que sólo queramos ocuparnos de aquello que en todas las teorías, independientemente de sus contenidos particulares, resulta válido, habremos de partir de los siguientes axiomas de igualdad:

(4.1) $\quad x = x$

(4.2) $\quad x = y \dot{\rightarrow} A(x) \leftrightarrow A(y)$

La igualdad queda unívocamente determinada por estos axiomas, es decir, que si ambos son válidos para dos relaciones $=_1$ y $=_2$, se sigue lógicamente:

$$x =_1 y \leftrightarrow x =_2 y$$

Porque entonces es válido, p. ej.:

$$x =_1 y \dot{\rightarrow} z =_2 x \rightarrow z =_2 y$$

por (4.2) con $z =_2 x$ en lugar de $A(x)$.

De esto se sigue que:

$$x =_1 y \dot{\rightarrow} x =_2 x \rightarrow x =_2 y$$

o sea, $\quad x =_1 y \rightarrow x =_2 y$

por $\quad x =_2 x$

El anterior axioma de igualdad (4.2) es lógicamente equivalente a la conjunción de

$$(4.3) \qquad x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y)$$
$$(4.4) \qquad x = y \wedge A(y) \rightarrow A(x)$$

(Con el fin de simplificar la puntuación adoptamos la convención de utilizar, en las composiciones, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ después de $\wedge$ y $\vee$.)

Como consecuencia de estos axiomas se deriva el siguiente teorema, que ya aparecía en EUCLIDES como «axioma»: Si dos medidas son iguales a una tercera, son iguales entre sí. En efecto, de (4.4) se sigue con $z = y$ en lugar de $A(y)$:

$$(4.5) \qquad x = y \wedge z = y \rightarrow z = x$$

Correspondientemente, de (4.3) se sigue:

$$(4.6) \qquad x = y \wedge x = z \rightarrow y = z$$

Llamamos a esta propiedad (4.5) o (4.6), respectivamente, comparatividad (por la derecha o por la izquierda, respectivamente).

(4.5) y (4.6) son lógicamente equivalentes a las propiedades más utilizadas de la simetría y de la transitividad:

$$(4.7) \qquad x = y \rightarrow y = x$$
$$(4.8) \qquad x = y \wedge y = z \rightarrow x = z,$$

como puede comprobarse inmediatamente.

Estas propiedades se siguen ya, sin más, de (4.5) o (4.6), con sólo utilizar adicionalmente la reflexividad

$$x = x,$$

es decir, nuestro anterior axioma de igualdad (4.1).

Sobre la base de esta conexión puede ser sustituido el axioma (4.2) por el más débil (4.3). En efecto, de (4.1) y (4.3) se sigue ya la simetría (4.7), y de ésta, con (4.3), resulta también (4.4), es decir,

(4.2). De esta manera obtenemos el sistema de axiomas siguiente, tal y como suele ser expuesto:

$$x = x$$
$$(Gl) \qquad x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y)$$

A la lógica de la igualdad le corresponde una especial importancia, ya que se encuentra en estrecha relación con la posibilidad de introducir objetos abstractos. El ejemplo más corriente de una abstracción de este tipo lo proporcionan los números racionales. Las fracciones (positivas) tipo $\frac{m}{n}$ son figuras compuestas a base de los símbolos numéricos m y n que representan enteros positivos: 1, 2, 3... Si m es divisible por n, tenemos que $\frac{m}{n}$ no es otra cosa que un nuevo símbolo para un entero positivo, es decir, para el cociente q, respecto del cual resulta válido $m = q \cdot n$.

Si m, por el contrario, no es divisible por n, entonces la fracción citada no es en principio símbolo de ningún número. Pero podemos manejar las fracciones *como si* fueran representaciones simbólicas de ciertos objetos a los que podemos dar el nombre de números racionales. Puesto que de $m = q \cdot n$ también se sigue que $m \cdot p = q \cdot n \cdot p$ y, por tanto, la fracción $\frac{m}{n}$ y la ampliada $\frac{m \cdot p}{n \cdot p}$ representan el mismo número entero positivo (en el caso de que en realidad representen tal número), se determina que por lo general dos fracciones representan «el mismo objeto» si pueden llegar, a través de simplificaciones válidas, a convertirse en la misma fracción.

El que dos fracciones $\frac{m_1}{n_1}$ y $\frac{m_2}{n_2}$ «representen igual objeto» puede ser asimismo definido de tal modo que valga:

$$(4.9) \qquad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

En lugar de decir que las fracciones representan números racionales, ya que esta expresión no está todavía justificada,

vamos a hacer uso primero de la relación definida por (4.9) entre las fracciones $\frac{m_1}{n_1}$ y $\frac{m_2}{n_2}$.

Podemos escribir, por ejemplo:

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \leftrightharpoons m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

A la izquierda hay fracciones, a la derecha enteros positivos. Los números racionales no aparecen todavía. La abstracción que conduce de las fracciones a los números racionales no significa otra cosa que nuestra decisión de limitarnos en nuestras proposiciones $A\left(\frac{m}{n}\right)$ sobre fracciones a un tipo de proposiciones para las que $A\left(\frac{m_1}{n_1}\right)$ y $A\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$ son equivalentes, caso sólo de $\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2}$.

Esta limitación de las proposiciones —más exactamente, de las formas proposicionales— a aquellas para las que tiene validez

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \rightarrow A\left(\frac{m_1}{n_1}\right) \leftrightarrow A\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$$

(diciendo en este caso que A es una forma proposicional compatible con $\sim$), no es sino una manera más precisa de entender aquello que, por otra parte, ha sido expresado al decir que era necesario «hacer abstracción» de ciertas diferencias entre los objetos originarios (aquí las fracciones), o que era necesario «abstraer» nuevos objetos a partir de los originarios.

Vamos a formular ahora las proposiciones compatibles sobre fracciones como proposiciones sobre números racionales. Así, por ejemplo, tiene validez:

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \dashrightarrow m_1 > n_1 \leftrightarrow m_2 > n_2$$

La forma proposicional $m > n$ puede, pues, ser leída también como una forma proposicional $\frac{m}{n} > 1$ sobre números racionales, y no sólo como una forma proposicional sobre fracciones.

«Concebir» $\frac{m}{n}$ como representación de un número racional equivale a decir que en las proposiciones sobre $\frac{m}{n}$ se ha tomado la decisión de limitarse a las proposiciones compatibles con $\sim$.

Los números racionales en cuanto a tal sólo «existen» aquí en la medida en que se habla así de ellos.

Si volvemos nuestra atención ahora hacia unos objetos cualesquiera $x, y, \ldots$, entre los que ha sido definida una relación $\sim$, veremos cómo tenemos que definir de nuevo las formas proposicionales $A(z)$ compatibles con $\sim$ por la validez de

$$x \sim y \dashrightarrow A(x) \leftrightarrow A(y)$$

Para que la relación $x \sim y$ sea compatible consigo misma (y en ambos argumentos x e y), es preciso que:

$$x \sim y \dashrightarrow x \sim z \leftrightarrow y \sim z$$
$$x \sim y \dashrightarrow z \sim x \leftrightarrow z \sim y$$

Si llamamos a estas relaciones $\sim$ compatibles consigo mismas «igualdades abstractas», podremos caracterizarlas también por la comparatividad por la derecha o por la izquierda, o también, por ejemplo, por la simetría y transitividad.

Una igualdad abstracta que todavía es reflexiva recibe el nombre de igualdad abstracta «total», en tanto que las restantes pueden ser denominadas igualdades abstractas «parciales».

Si nos limitamos en una igualdad abstracta parcial $\sim$, es decir, en una relación simétrica y transitiva, a unos objetos x tales que $x \sim x$ (formando ambas x la clase de reflexividad de $\sim$), tendremos que la relación $\sim$ será para estos objetos una igualdad abstracta total, desde luego. La limitación de una igualdad abstracta parcial a la clase de reflexividad sólo significa la limitación a aquellos objetos x para los cuales hay un objeto y con $x \sim y$ o $y \sim x$. Porque en virtud de la comparatividad por la derecha vale:

$$x \sim y \rightarrow x \sim x$$

en tanto que en virtud de la comparatividad por la izquierda vale también:

$$y \sim x \rightarrow x \sim x$$

Bastará, pues, con que nos ocupemos de las igualdades abstractas totales.

Toda igualdad abstracta $\sim$ entre cualesquiera objetos (figuras) permite hablar de nuevos objetos «abstractos». Si vale $x \sim y$, diremos que x e y representan el mismo objeto abstracto. Las proposiciones sobre objetos abstractos son definidas como las proposiciones sobre los objetos originarios que son compatibles con $\sim$; y únicamente así son «definidos» también los propios objetos abstractos. Si escribimos ahora $\tilde{x} = \tilde{y}$ en lugar de $x \sim y$ y consideramos $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, ... como nombres para los objetos abstractos, nos habremos limitado a introducir una nueva manera de hablar y de escribir, sin haber hecho en realidad ningún otro cambio.

La abstracción es actualmente reducida a menudo, como herencia del logicismo de FREGE (véase la *Introducción)*, a conceptos de la teoría de conjuntos. Los objetos abstractos son definidos como conjuntos de objetos originarios; así, $\tilde{x}$, p. ej., es el conjunto de los z tales que $x \sim z$. En virtud de la definición de la igualdad propia de la teoría de conjuntos, tendremos, pues, que vale $\tilde{x} = \tilde{y} \leftrightarrow x \sim y$. Se presupone a este respecto la «existencia» de los conjuntos.

La anterior introducción de la abstracción como una «façon de parler» nos dispensa de todos los presupuestos de la teoría de conjuntos. Antes bien puede llegar incluso a justificar que se hable de «conjuntos» como objetos abstractos. Partimos para ello de la posibilidad de concebir a los conjuntos como extensiones de conceptos. De manera más precisa: vamos a sustituir los «conceptos» del lenguaje natural por las formas proposicionales de una teoría matemática, por las de la aritmética, por ejemplo.

Una igualdad abstracta puede, pues, ser definida para estas formas proposicionales $A_1(x)$, $A_2(x)$, ... por

$$A_1(x) \sim A_2(x) \leftrightharpoons \wedge x \cdot A_1(x) \leftrightarrow A_2(x).$$

Como la variable x que figura a la derecha es una variable ligada, no se trata de una relación de igualdad entre formas proposicionales, sino, más exactamente, de una relación entre formas proposicionales respecto de una variable. De ahí que para designar el objeto abstracto representado por $A(x)$ no baste con $\tilde{A}(x)$; será de todo punto necesario que la variable x conste

en la denominación. Haciendo un uso nuevo del signo ϵ, muy frecuente en teoría de conjuntos, en lugar de $\tilde{A}(x)$ escribiremos más exactamente $\epsilon_x A(x)$. En lugar de decir que $A(x)$ representa un «conjunto» respecto de x, podremos, en consecuencia, decir también que $\epsilon_x A(x)$ designa un conjunto. Vale así

$$\epsilon_x A_1(x) = \epsilon_x A_2(x) \leftrightarrow \wedge_x . A_1(x) \leftrightarrow A_2(x).$$

Con lo que los «conjuntos» no son otra cosa que *abstracta* de formas proposicionales. Los conjuntos finitos usualmente introducidos como «colecciones» de objetos sólo en algún caso particular son nuestros *abstracta*. Porque el conjunto $\{n_1, ..., n_r\}$, que contiene los elementos $n_1, ..., n_r$ puede ser también definido como $\epsilon_x (x = n_1 \vee x = n_2 \vee ... \vee x = n_r)$. En cuanto a los conjuntos infinitos, por el contrario, únicamente si se ha hecho una abstracción a partir de las formas proposicionales que representan los conjuntos tiene algún sentido hablar de «colecciones».

Para $M = \epsilon_x A(x)$ se define la «relación de pertenencia» ϵ por

$$y \in M \leftrightharpoons A(y)$$

Esta relación es evidentemente compatible con la igualdad abstracta entre las formas proposicionales que representan los conjuntos. Si se consideran unas formas proposicionales en las que aparecen varias variables libres, en lugar de conjuntos se obtienen «relaciones». Se define de nuevo:

$$\epsilon_{x_1}, ..., x_r\, A(x_1, ..., x_r) = \epsilon_{x_1}, ..., x_r\, B(x_1, ..., x_r)$$
$$\leftrightharpoons \wedge_{x_1}, ..., x_r . A(x_1, ..., x_r) \leftrightarrow B(x_1, ..., x_r).$$

y para $R = \epsilon_{x_1}, ..., x_r\, A(x_1, ..., x_r)$

$$y_1, ..., y_r \in R \leftrightharpoons A(y_1, ..., y_r)$$

En el caso particular de relaciones binarias se suele escribir

$$x_1\, R\, x_2 \text{ en lugar de } x_1\, x_2 \in R.$$

La composición de formas proposicionales con la ayuda de partículas lógicas suministra ciertos «functores» para las relaciones y para los conjuntos, p ej.:

$$M \cap N = \epsilon_x \,.\, x \in M \wedge \in N.$$
$$M \cup N = \epsilon_x \,.\, x \in M \vee x \in N.$$
$$M __ N = \epsilon_x \,.\, x \in M \wedge \neg\, x \in N.$$

Como una relación entre conjuntos (relaciones) es definida la «inclusión» por:

$$M \subseteq N \leftrightharpoons \wedge_x \,.\, x \in M \rightarrow x \in N.$$

Junto a los conjuntos (relaciones), las aplicaciones (funciones) juegan un papel muy importante en la matemática moderna. Muchos autores definen las funciones como relaciones particulares. Así, por ejemplo, si para una relación binaria R vale

$$x\, R\, y_1 \wedge x\, R\, y_2 \rightarrow y_1 = y_2,$$

se dice que es una relación unívoca a la derecha y, más brevemente, que es una «función». Aunque esta concepción no deja de tener algo de arbitrario. En aritmética, p. ej., la función del «sucesor», que toma el valor $n + 1$ para el argumento n, no proviene de una relación semejante; resulta, por el contrario, de manera inmediata de la construcción de los símbolos numéricos |, ||, |||, ... Para la descripción de esta construcción se utilizan además de las constantes |, ||, |||, ... las «variables» $x, y, \ldots$ con las que se forma el «término» $x|$. Un término es una figura que contiene eventualmente variables libres y que al sustituir todas sus variables libres por constantes se convierte a su vez en una constante. En lógica, p. ej., donde puede darse el caso particular de que las constantes sean proposiciones, fórmulas como, por ejemplo, $a \wedge b$ y $a \rightarrow b$ son al mismo tiempo «términos». Por regla general, sin embargo —como ocurre en la aritmética—, hay que distinguir cuidadosamente entre las «fórmulas», que son formas proposicionales, y los «términos», que son formas de constantes.

De los términos se pasa por abstracción a las aplicaciones (funciones) de idéntica manera a como de las fórmulas se pasa a los conjuntos (relaciones).

Para dos términos $T_1(x)$ y $T_2(x)$, en los que aparece una variable libre x, se define una igualdad abstracta por

$$T_1(x) \sim T_2(x) \leftrightharpoons \wedge_x T_1(x) = T_2(x)$$

La igualdad $=$, que figura a la derecha, es la igualdad entre los objetos para los que son utilizadas las variables. También en el caso de los términos viene la abstracción referida a una variable. Por analogía con $\epsilon_x A(x)$ escribimos $\imath_x T(x)$ —invirtiendo el $\imath$ introducido por PEANO— para designar el *abstractum* al que llamamos «representación». $\imath_x T(x)$ es la representación que para el «argumento» y tiene el «valor» $T(y)$. Como para el ϵ de la teoría de conjuntos, hemos de poner ahora

$$f \imath y \leftrightharpoons T(y)$$

para definir $f = \imath_x T(x)$. $\imath$ es la «función argumental» binaria que tiene f e y como argumentos y $T(y)$ como valor.

Si consideramos unos términos en los que figuran diversas variables libres, en lugar de representaciones tendremos «funciones». Como definición:

$$\imath_{x_1, \ldots, x_r} S(x_1, \ldots, x_r) = \imath_{x_1, \ldots, x_r} T(x_1, \ldots, x_r)$$
$$\leftrightharpoons \wedge_{x_1, \ldots, x_r} S(x_1, \ldots, x_r) = T(x_1, \ldots, x_r)$$

y para $f = \imath_{x_1, \ldots, x_r} S(x_1, \ldots, x_r)$:

$$f \imath y_1, \ldots, y_r \leftrightharpoons S(y_1, \ldots, y_r)$$

Las funciones son introducidas aquí como *abstracta* de términos y, en consecuencia, son más que las relaciones, que no son sino *abstracta* de fórmulas. Las funciones de un solo argumento pueden ser, no obstante, «identificadas» con las relaciones binarias unívocas a la derecha sin dar lugar a conflicto alguno, ya que toda función f determina una y sólo una relación del tipo: $R = \epsilon_{x,y}\, f \imath x = y$.

Si, por el contrario, se quiere obtener a partir de R un término que represente a f, tendrá que ser utilizado un «descriptor», o término de descripción, $\iota_y\, x\, R\, y$ (en palabras: el y tal que $x\, R\, y$).

En lo sucesivo no haremos, de todos modos, apenas uso de la teoría de estos términos, limitándonos, en consecuencia, a subrayar únicamente que $\iota_x A(x)$ tiene siempre sentido si vale:

$$\vee_x A(x)$$

y

$$A(x_1) \wedge A(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Para $\iota_x A(x)$ tiene en tal caso validez $A(\iota_x A(x))$.

II

FORMALIZACION DE LA ARITMETICA

§ 5. Aritmética constructiva y axiomática

Al ocuparnos en el § 2 de las proposiciones no v-definidas, no hemos escogido al azar una proposición aritmética como primer ejemplo. La aritmética es, de hecho, la teoría en la que el infinito aparece de manera más simple. Es más, en lo esencial no es otra cosa que una teoría del infinito.

El concepto de infinitud aparece cuando el hombre «concibe» una regla cuya repetida aplicación conduce siempre a algo nuevo. La regla más sencilla de entre las que de este modo producen una infinitud es la regla para la construcción de símbolos numéricos, las cifras, en la forma, por ejemplo |, ||, |||,... La construcción comienza con el símbolo |, y procede de acuerdo con la regla

$$n \Rightarrow n|$$

que prescribe que para dar lugar a la cifra $n|$ hay que añadir | a la ya construida cifra n.

Igualdad y desigualdad de cifras son determinadas a base de quitar a un tiempo a cada una de las cifras que hay que comparar una barra |, comparando acto seguido las cifras que resultan. Puede ocurrir que este procedimiento termine al mismo tiempo en las dos cifras, conduciendo a una figura «vacía», en cuyo caso estamos ante la igualdad, y puede ocurrir también que únicamente termine en una sola de las cifras, en cuyo caso estamos ante la desigualdad.

Si expresamos el resultado del procedimiento por $m = n$ (igualdad) o por $m \neq n$ (desigualdad), podremos describir asimismo dicho procedimiento del siguiente modo:

(1) Vale $m| = n|$ o $m| \neq n|$, si $m = n$ o $m \neq n$, respectivamente.

(2) Vale $| = |$, pero $m| \neq | y | \neq n|$ para cifras (no vacías) m y n.

Más brevemente aún podemos formular como reglas para la construcción de proposiciones «verdaderas» de igualdad y desigualdad, las siguientes:

(5.1)
$$| = |$$
$$m = n \Rightarrow m | = n |$$
$$m | \neq |$$
$$| \neq n |$$
$$m \neq n \Rightarrow m | \neq n$$

Estas reglas carecen, desde luego, de valor práctico para la comparación de cifras, ya que dan por supuesto que la misma variable, p. ej., m, es sustituida siempre por cifras iguales. Estas reglas no tienen otro valor que el teórico de caracterizar rigurosamente el procedimiento en cuestión. Pueden ser, por tanto, concebidas como una «definición» de igualdad y desigualdad, permitiéndonos basar diversos teoremas concernientes a estas relaciones sobre dichas definiciones.

Damos el nombre de «definiciones inductivas» a estas definiciones, con las que nos encontramos aquí por primera vez. Constan de un sistema de reglas para la obtención (derivación) de figuras, en este caso de figuras de la forma $m = n$ o bien $m \neq n$. Aquí cabe hablar con razón de «definiciones», ya que en virtud del sistema de reglas la afirmación de una proposición $m = n$ o $m \neq n$ tiene un sentido p-definido. Quien afirme, p. ej., $||| \neq |||||$, habrá de procurar, si su oponente se lo exige, una derivación de esta figura de acuerdo con las reglas (5.1).

También las operaciones de cálculo del tipo de la adición y multiplicación pueden ser introducidas a base de estas definiciones inductivas, de tal modo que toda proposición de la forma $m + n = p$ o $m \cdot n = p$ tenga un sentido p-definido.

El procedimiento de la adición es determinado por el sistema de reglas:

(5.2)
$$m + | = m |$$
$$m + n = p \Rightarrow m + n | = p |$$

y el procedimiento de la multiplicación, a su vez, por:

(5.3)
$$| \cdot n = n$$
$$m \cdot n = p,, p + n = q \Rightarrow m | \cdot n = q$$

Esto no son sino sistemas de reglas para la derivación de proposiciones de la forma $m + n = p$ y $m \cdot n = p$. La afirmación de que una de estas proposiciones «vale», significa que es derivable con la ayuda de dichas reglas. Lo que a su vez tampoco significa otra cosa que quien en un diálogo afirma una proposición semejante tiene que estar en condiciones de aducir una derivación si no quiere perder el diálogo.

El que en las proposiciones sobre adición y multiplicación haya sido ya utilizado el símbolo de la igualdad —introducido en (5.1)— debe ser considerado como una anticipación. En lugar de $m + n = p$ o $m \cdot n = q$ podría escribirse primero, más prudentemente:

$$\frac{m + n}{p} \text{ o } \frac{m \cdot n}{q}$$

En esta notación «valdría», sin embargo:

(5.4)
$$\frac{m + n}{p} \wedge \frac{m + n}{q} \rightarrow p = q$$

de tal manera que la notación con los signos de igualdad resulta, pues, más conveniente, ya que

(5.5)
$$m + n = p \wedge m + n = q \rightarrow p = q$$

se deduce ya de los axiomas de igualdad del § 4.

¿Qué significa aquí la «validez» de (5.4) o de (5.5)? En la lógica efectiva decíamos que en lo concerniente a las proposiciones d-definidas, verdad o falsedad significaban que el diálogo puede ser ganado contra todo oponente. En cuanto a nuestras proposiciones aritméticas básicas, también son introducidas ahora como proposiciones p-definidas, de tal modo que la «validez» de (5.5) radica en que dicha afirmación puede ser ganada siempre en un diálogo en virtud de las definiciones inductivas de las proposiciones básicas que contiene (y en virtud, asimismo, del sentido operativo de las partículas lógicas).

Lo que aquí está en juego no es ya la verdad lógica. La ganancia no es ya posible atendiendo sólo a la forma. Ahora se trata específicamente de la verdad artimética o validez. El diálogo podrá ser ganado teniendo en cuenta el sentido especial de las proposiciones básicas —es decir, atendiendo a sus definiciones inductivas—. Respecto de (5.5) no es nada difícil de ver. En efecto, si el oponente *O* afirma

$$\left.\begin{array}{l} m + n = p \\ m + n = q \end{array}\right\|$$

a instancias del proponente *P*, que puede tener sus dudas, tendrá que allegar derivaciones para ambas afirmaciones. De acuerdo con (5.2) ambas derivaciones comienzan con $m + | = m|$ y proceden de tal modo que a la derecha y a la izquierda de $=$ sea añadido siempre al mismo tiempo un $|$. A la derecha de $=$ tendremos, pues, primero en ambos casos $m|$ y (paralelamente al avance, por la izquierda, de $|$ pasando por $||$, $|||$,... hasta *n)* seguirán a la derecha las cifras $m||$, $m|||$,... hasta p o q.

De manera, pues, que si el proponente comienza la prueba de $p = q$, pedida por él, con la igualdad $m| = m|$ y avanza (otra vez paralelamente a la progresión de $|$ pasando por $||$, $|||$,... hasta *n)* de acuerdo con (5.1) por $m|| = m||$, $m||| = m|||$,... acaba llegando a $p = q$.

Esta descripción de una estrategia de ganancia para (5.5) no es una «prueba» en el sentido de una derivación de la proposición a partir de unas reglas precisas. En el § 2, investigando sistemáticamente sobre las estrategias de ganancia, llegábamos, para la lógica (constructiva), a un cálculo lógico. La verdad lógica de una proposición puede ser «probada» por una simple derivación de acuerdo con las reglas del cálculo lógico. Queda así planteado un problema de fundamental importancia para la metamatemática entera, es decir, el problema de si también puede resultar posible la obtención de un «cálculo» para todas las proposiciones aritméticamente verdaderas, un cálculo que reduzca la «prueba» de una proposición de este tipo a la indicación de una derivación dentro del cálculo mismo.

De acuerdo con el teorema de incompletitud de GÖDEL la respuesta a esta pregunta es negativa. De todos modos, antes de fundamentar y precisar —en el cap. III— esta negación,

hemos de pasar revista a los intentos hechos con vistas a obtener cálculos de este tipo, intentos que se remontan a DEDEKIND, PEANO y FREGE.

Como anteriormente a FREGE la lógica no era introducida de manera explícita en la matemática, siendo tan sólo presupuesta implícitamente y considerada en cierto modo como «evidente», no se planteó en un principio el problema en términos de una reducción de la aritmética a un cálculo, sino —análogamente a la geometría— en términos de una posible axiomatización de la aritmética. ¿Pueden ser consideradas ciertas proposiciones como «axiomas», tales que *todos* los teoremas de la aritmética (y, por supuesto, sólo ellos, es decir, ninguna proposición aritmética falsa) puedan deducirse de manera puramente lógica a partir de dichos axiomas? En la geometría, un sistema de axiomas descansa normalmente —si prescindimos del moderno empirismo fisicalista— sobre la «verdad» atribuida a los axiomas, en virtud de «representaciones de contenido» obtenidas en el contacto práctico con nociones geométricas básicas. De manera semejante puede fundamentarse también una axiomática de la aritmética. Los «números» y las «operaciones de cálculo» son interpretados, en este caso, como algo cuyo contenido es conocido, de tal manera que determinadas proposiciones como, por ejemplo:

$$(5.6) \qquad m| = n| \rightarrow m = n$$

han de ser tenidas por verdaderas.

Si, por el contrario, partimos de la aritmética constructiva, la analogía con la geometría ya no tiene por qué ser aducida. Sobre la base de la construcción de cifras, y sobre la base de las definiciones inductivas de la igualdad, de la desigualdad y de las operaciones de cálculo, queda ya definido (en conexión con la interpretación operativa de las partículas lógicas) cuándo una proposición es aritméticamente verdadera, es decir, en el caso de que exista una estrategia de gancia para ella.

De manera, pues, que una proposición como (5.6) no podrá ya ser erigida sin más como axioma; será preciso asegurarse antes de que *P*, como proponente, puede ganar contra todo oponente *O* el siguiente diálogo

$$\| \; m \mid = n \mid \rightarrow m = n$$

para todo m y n.

No es difícil llegar a tal convicción. Si, por ejemplo, O afirma por su parte $m \mid = n \mid$, tendrá que aducir una prueba para ello, es decir, una derivación a partir de (5.1). Derivación que tendrá la siguiente fisonomía:

$$\begin{array}{l} \mid = \mid \\ \mid\mid = \mid\mid \\ \ldots \\ m = n \\ m \mid = n \mid \end{array}$$

Al proponente le basta con eliminar la última línea de esta derivación para tener una derivación de $m = n$.

También en este caso podría decirse que a la convicción de poseer realmente una estrategia de este tipo sólo puede llegarse sobre la base de ciertas representaciones de contenido. Pero el «contenido» de estas representaciones no es otra cosa que el operar con símbolos conforme a las reglas dadas y no tiene nada que ver con un eventual «significado» de los símbolos.

Puesto que ya tenemos el cálculo lógico a nuestra disposición, podemos preguntar de nuevo en qué medida cabe reducir, en el mecanismo operativo, la utilización de estas representaciones de contenido necesarias para la comprensión de una estrategia de ganancia —y, en consecuencia para el examen de la verdad de una proposición— al examen de la verdad de ciertas proposiciones iniciales, de tal modo que las restantes ya no sean sino una consecuencia lógica de las mismas.

De acuerdo con el teorema de incompletitud de GÖDEL, esto no es posible, es decir, no es posible que la aplicación del cálculo lógico a un sistema (enumerable, comp. con el § 8) de axiomas nos proporcione todas las proposiciones aritméticas verdaderas. Sin embargo, acogiéndose a un sentido más amplio de «consecuencia lógica» se puede aducir un sistema de axiomas «completo» para la aritmética.

Un sistema de axiomas de este tipo no viene determinado unívocamente; son posibles diversos sistemas que, en principio, resultan equivalentes, como por lo demás ocurre también en la geometría. El sistema de axiomas más usual se remonta a DEDEKIND y PEANO. Por lo general es formulado para los números naturales 0, 1, 2... (es decir, incluido el 0, a diferencia de los cardinales 1, 2, 3...).

Vamos a utilizar las letras x, y,... como variables sintácticas para las variables objetuales de la teoría axiomática a construir. Con estas variables son, en primer lugar, introducidos como *términos primitivos* —además de las variables— 0 y x'. Los *términos* s, t,... son entonces:

(1) Términos primitivos.
(2) $s(t)$, si $s(x)$ y t son términos.

De acuerdo con esto son términos las cifras 0, 0′, 0″,... y x, x', x'',... Hay que tener en cuenta que x es introducido para una variable objetual cualquiera. Es indiferente qué símbolos sean utilizados como variables objetuales

Como axiomas para la igualdad aduciremos, además de los axiomas generales de la igualdad (§ 4)

$$(5.7) \qquad \begin{array}{l} x = x \\ x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y) \end{array}$$

los siguientes:

$$(5.8) \qquad \begin{array}{l} \neg\, x' = 0 \\ x' = y' \rightarrow x = y \end{array}$$

Si se interpretan las variables como variables únicamente para las cifras y se define inductivamente la igualdad de acuerdo con (5.1) por

$$\begin{array}{l} 0 = 0 \\ x = y \Rightarrow x' = y' \end{array}$$

las proposiciones (5.8) son aritméticamente verdaderas: pueden ser sostenidas contra todo oponente. En el caso de $\neg\, x' = 0$,

el oponente debería estar en condiciones de probar $x' = 0$, lo cual es «manifiestamente» imposible. La proposición $x' = y' \rightarrow \rightarrow x = y$ ha de ser tratada de acuerdo con (5.6).

Para la axiomatización de las operaciones de cálculo son aumentados los términos introduciendo nuevos términos primitivos $(x + y)$ y $(x \cdot y)$. Son entonces términos, p. ej.:

$$(0''' + 0'') \cdot 0' \text{ y } x'' \cdot y + 0''''$$

con el usual ahorro de paréntesis.

Como variables para las cifras 0, 0', 0'',... utilizaremos en lo sucesivo m, n,...

Como nuevos axiomas para las operaciones de cálculo tomamos:

(5.9)
$$x + 0 = x$$
$$x + y' = (x + y)'$$
$$0 \cdot y = 0$$
$$x' \cdot y = x \cdot y + y$$

No se trata, pues, de otra cosa que de una formulación de las definiciones inductivas (5.2) y (5.3), haciendo ahora uso de términos y ampliándolas a los números naturales. Todas las proposiciones artiméticas verdaderas de las formas $m = n$, $m + n = p$ y $m \cdot n = p$ pueden deducirse lógicamente de estos axiomas. En realidad, ni siquiera se hace uso de la lógica: basta con que en los axiomas las variables sean sustituidas siempre por términos adecuados y, acto seguido, de dos ecuaciones tipo $x = y$ y $A(x)$ se pasa a una nueva ecuación $A(y)$. Por ejemplo:

$0'' + 0 = 0''$	Axioma
$0'' + 0' = (0'' + 0)'$	Axioma
$0'' + 0' = 0'''$	Conclusión
$0'' + 0'' = (0'' + 0')'$	Axioma
$0'' + 0'' = 0''''$	Conclusión

Haciendo mayor uso de la lógica pueden ser obtenidas todas las desigualdades verdaderas $m \neq n$ en la forma $\neg m = n$. De acuerdo con el § 4, de los axiomas de igualdad se sigue

$$x = y \rightarrow y = x$$

y por contraposición lógico-constructiva

$$\neg y = x \rightarrow \neg x = y$$

Juntamente con el axioma $\neg y' = 0$ se sigue

$$\neg 0 = y'$$

Del axioma $x' = y' \rightarrow x = y$ se sigue por contraposición

$$\neg x = y \rightarrow \neg x' = y'$$

con lo que se tienen reunidas las reglas de la definición inductiva (5.1) de la desigualdad, formuladas ahora como condicionales. De manera más general se obtienen todas las proposiciones verdaderas de la forma $s = t$ o $s \neq t$ para los términos constantes s, t, a partir de ecuaciones adecuadas $s = m$, $t = n$ y $m = n$, o $m \neq n$.

Estas proposiciones primitivas son p-definidas. Si se las une simplemente con las partículas lógicas $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_x$ conservan su carácter de p-definidas.

También una proposición como, p. ej.:

$$\bigvee_x 0'' + x = 0'''' \vee \bigvee_y 0'''' + y = 0''$$

puede, pues, ser lógicamente derivada de los axiomas anteriores. Las inferencias lógicas a utilizar tienen, por tanto, en virtud del sentido p-definido de las partículas lógicas $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_x$, sencillamente la forma

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad \frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

y

$$\frac{A(n)}{\vee_x A(x)}$$

La situación se modifica esencialmente cuando se introduce junto al cuantificador existencial $\vee_x$, el cuantificador universal $\wedge_x$ en las composiciones. Considérese, p. ej., la proposición aritmética —reconocidamente verdadera—

$$\wedge_x x \cdot 0 = 0$$

Para sostenerla en un diálogo, para toda cifra m —que el oponente puede escoger— habrá de probarse la proposición $m \cdot 0 = 0$. Pero en los axiomas sólo tenemos $0 \cdot x = 0$, y de la ley general de la conmutatividad $x \cdot y = y \cdot x$ todavía no puede hacerse uso. ¿Cómo dar, pues, con una estrategia de ganancia?

Si el oponente escoge $m = 0$, tendrá que ganar $0 \cdot 0 = 0$ por sustitución a partir de $0 \cdot x = 0$. Si el oponente escoge $m = 0'$, podrá inferir así (en escritura abreviada):

$$0' \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$$

Para $m = 0''$ se inferirá análogamente:

$$0'' \cdot 0 = 0' \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$$

en donde ya se utiliza el resultado anterior $0' \cdot 0 = 0$. Según esta muestra, para toda elección de una cifra m del oponente, puede construirse una prueba de $m \cdot 0 = 0$. Contrariamente a la lógica —también en geometría es totalmente diferente— se sabe aquí que el oponente, al atacar una proposición universal del tipo $\wedge_x A(x)$ sólo puede escoger, para x, una de las cifras $0, 0', 0'', \ldots$ una de las figuras, pues, que pueden construirse de acuerdo con las siguientes reglas:

(1) 0
(2) $n \Rightarrow n'$

Si se aprovecha este conocimiento, que en la aritmética se une adicionalmente al sentido operativo del cuantificador universal, se puede llegar a la convicción de que para la defensa de $\wedge_x A(x)$ basta con:

(1) tener una prueba de $A(0)$,
(2) poder construir una prueba de $A(n')$ a partir de una prueba de $A(n)$.

En (2) se nos aparece de nuevo una proposición sobre todos los n. Pero algunas proposiciones universales han sido ya dadas como axiomas.

Respecto de la proposición universal $\wedge_x x \cdot 0 = 0$, p. ej., es

(1) $0 \cdot 0 = 0$ un axioma

y se sigue (2) $n' \cdot 0 = 0$

en virtud del axioma

$$x' \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$$

inmediatamente de $n \cdot 0 = 0$.

Las condiciones suficientes dadas para la defensa de una proposición universal $\wedge_x A(x)$ también son, evidentemente, necesarias: para todo n hay que poder dar una prueba de $A(n)$.

La situación se complica un poco por el hecho de que al admitir el cuantificador universal para la composición de proposiciones puedan aparecer también proposiciones como $\wedge_x A(x)$, respecto de las cuales las propias proposiciones $A(n)$ contienen ya cuantificadores universales y por ello no necesitan ser p-definidas. En lugar de «pruebas» se deberá hablar más bien de «estrategias de ganancia» en las condiciones (1) y (2). Con ello queda claro que estas condiciones para la defensa de $\wedge_x A(x)$ no pueden ser suficientemente abarcadas por un «axioma de inducción», como el que figura en la axiomatización de la aritmética de DEDEKIND-PEANO:

(5.10) $\quad A(0) \wedge \wedge_x . A(x) \rightarrow A(x') . \rightarrow \wedge_y A(y)$

Así, pues, las formas proposicionales $A(x)$ no deberán ser limitadas en este axioma al «lenguaje objeto», esto es, a fórmulas, en este caso, que pueden ser construidas a base de conexiones de las fórmulas primitivas $s = t$ con la sola ayuda de las partículas lógicas. Pero el axioma de inducción es, evidentemente, una proposición aritméticamente verdadera. Para toda forma proposicional $A(x)$ d-definida, cabe aducir fácilmente una estrategia de ganancia para la defensa de (5.10). Si el oponente O duda la afirmación, ha de asumir él mismo las premisas, surgiendo entonces la situación siguiente:

$$\begin{array}{r||l} A(0) & \\ \wedge_x . A(x) \rightarrow A(x'). & \wedge_y (Ay) \end{array}$$

O debe poner en duda ahora la afirmación del proponente P aduciendo una cifra n:

$$n? \;||$$

y P tiene que afirmar $A(n)$. Antes puede obligar, sin embargo, a O a sostener él mismo $A(n)$. Para ello ataca la afirmación universal de O de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r||ll} & & 0\,? \\ A(0) \rightarrow A(0') & A(0) & ? \\ A(0') & & 0'\,? \\ A(0') \rightarrow A(0'') & A(0') & ? \\ A(0'') & & 0''\,? \\ \ldots & \ldots & \end{array}$$

continuando así hasta que O haya llegado a $A(n)$.

Hemos probado así que el axioma de la inducción es aritméticamente verdadero (para la aritmética constructiva) —y se ve que para esta prueba la forma proposicional $A(x)$ no necesita ser restringida a un lenguaje determinado.

Con esta inducción pueden ser, por último, probados constructivamente los axiomas de la igualdad (5.7). La prueba por inducción de $x = x$ es trivial. El axioma $x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y)$ dice que las fórmulas aritméticas compuestas lógicamente a partir de las fórmulas atómicas $s = t$, son compatibles con $=$, tal y como lo requiere la teoría lógica de la igualdad.

Basta con probar la compatibilidad de las fórmulas atómicas (cfr. a este propósito la derivación del axioma de la igualdad en § 7, válida, asimismo, desde el punto de vista constructivo). Para la compatibilidad de la fórmula atómica $x = y$ y del término primitivo x', basta con:

$$x = y \wedge x = z \rightarrow y = z$$

$$x = y \wedge x' = z \rightarrow y' = z$$

Las inducciones (triples) necesarias son un poco fastidiosas y, en consecuencia, prescindimos de ellas (cfr. LORENZEN, 1955).

Si los términos primitivos $x + y$, $x \cdot y$ son reemplazados por descriptores (cfr. § 4), bastará con probar por inducción la compatibilidad de las fórmulas atómicas $x + y = z$ y $x \cdot y = z$. Pero tampoco vamos a detenernos en ello.

Tras de la prueba constructiva de los «axiomas» vamos a entrar en el problema de su eventual completitud.

Si en (5.10) el símbolo $A(x)$ no es sometido a ninguna restricción, es fácil probar una determinada completitud del sistema de axiomas (5.7) - (5.10) —el sistema de Peano—, resumiendo en el siguiente sentido: todo modelo (cfr. a este respecto el § 13) del sistema de axiomas es isomórfico al modelo de los números naturales. Formulando esto sin hacer referencia a los números naturales, quiere decir que todos los modelos del sistema de axiomas son isomórficos entre sí. Esta propiedad del sistema de Peano recibe el nombre de monomorfía, para evitar el término «completitud».

Como prueba hay que aducir para un modelo cualquiera $\mathfrak{M}$ (que nos figuramos definido de alguna manera en el marco de la matemática constructiva) un isomorfismo respecto del modelo $\mathfrak{N}$ de los números naturales. Supongamos que vienen dados en $\mathfrak{M}$ un elemento $\mathfrak{u}$ y funciones $*$, $\oplus$, $\odot$, de tal manera que

los axiomas (5.7) - (5.10) se convierten en proposiciones relativas a $\mathfrak{Z}$, al sustituir en ellos 0 ó $'$, $+$, $\cdot$ por $\mathfrak{v}$ ó $*$, $\oplus$, $\odot$. En cuyo caso definimos inductivamente una aplicación de números naturales f, en $\mathfrak{Z}$, por

$$f \mathfrak{z} 0 = \mathfrak{v}$$
$$f \mathfrak{z} n' = (f \mathfrak{z} n)^*$$

Esta definición inductiva de la aplicación f, es decir, de las fórmulas $f \mathfrak{z} n = \mathfrak{x}$ (con $\mathfrak{x}$ como variable para los elementos de $\mathfrak{Z}$) podría ser formulada también con la ayuda de las siguientes reglas:

$$f \mathfrak{z} 0 = \mathfrak{v}$$
$$f \mathfrak{z} n = \mathfrak{x} \Rightarrow f \mathfrak{z} n' = \mathfrak{x}^*$$

Acto seguido hay que probar que esta aplicación f es realmente un isomorfismo de $\mathfrak{Z}$ y $\mathfrak{N}$. Cosa que puede hacerse muy bien con la ayuda del axioma de inducción, por lo que no hace falta entrar en ello. Lo importante es, a nuestros efectos, que en las proposiciones $\wedge_x A(x)$, que han de ser probadas con la ayuda del axioma de inducción, figure asimismo la aplicación f, que en este caso no pertenece sólo al lenguaje objeto de la aritmética. Como mostró por vez primera SKOLEM en 1933, la monomorfía ya no vale si en el axioma de inducción (5.10) son restringidas las formas proposicionales $A(x)$ al lenguaje objeto. Este teorema de SKOLEM puede deducirse del teorema de incompletitud de GÖDEL (cfr. § 15).

Al sistema de axiomas (5.7) - (5.10), con la restricción de las fórmulas $A(x)$ al lenguaje objeto, le damos el nombre de sistema restringido de PEANO.

Sólo el sistema más restringido de Peano —la restricción ha de extenderse además al axioma de igualdad— lleva, con la ayuda del cálculo lógico, a una formalización de la aritmética. Sin una restricción de las fórmulas es imposible reducir la prueba de proposiciones a una simple derivación.

Antes de entrar en la completitud —que, como ya hemos dicho, no es alcanzable— hemos de ocuparnos de otro problema importante para el sistema restringido de Peano. Se trata de

saber si al añadir al sistema de Peano el cálculo lógico *clásico* no resultarán derivables demasiadas proposiciones. El cálculo lógico clásico resulta, en efecto, en virtud de una extensión, en principio arbitraria, de ciertas propiedades de simetría de la lógica clásica de yuntores a la de cuantificadores. Ahora, en la aritmética, hemos de habérnoslas precisamente con infinitos objetos, con lo que surge el problema de justificar la aplicación de la lógica clásica a la aritmética.

Naturalmente que no se trata de que todas las proposiciones derivables del sistema restringido de Peano con ayuda de la lógica clásica sean constructivamente verdaderas, es decir, defendibles en todo momento en un diálogo. Pero como exigencia mínima para la aplicación de la lógica clásica sí puede formularse la de que para ninguna proposición A puedan a la vez derivarse A y $\neg A$. Es la mínima exigencia de la consistencia (absoluta), de la que nos ocuparemos en los §§ siguientes. Para la lógica clásica fue demostrada por vez primera por GENTZEN (1936). Nuestra prueba en el § 7 será mucho más sencilla, ya que haremos uso de la interpretación operativa del cuantificador universal.

§ 6. FORMALIZACIÓN DE LA ARITMÉTICA CLÁSICA

Nos hemos familiarizado en el § 3 con el cálculo clásico de cuantificadores y en el § 5 con el sistema de axiomas de Peano para la aritmética. Para formalizar la aritmética clásica vamos a utilizar una combinación del sistema restringido de Peano y el cálculo clásico de cuantificadores.

Para la lógica clásica habíamos elaborado un cálculo a partir de implicaciones. Una implicación $A < B$ nos dice que B es verdadera por razones lógicas si A es verdadera. El sistema de Peano, por otra parte, consta de proposiciones que deben ser «verdaderas» para la aritmética, o sea, que puede decirse que *son* verdaderas sobre la base de la aritmética constructiva y de la lógica constructiva. Uniendo ambos campos obtenemos ulteriores proposiciones aritméticas verdaderas, que consideramos como implicaciones lógicas $A < B$, donde A es una conjunción de axiomas; en tal caso B es asimismo aritméticamente verdadera.

Con el fin de desviarnos en nuestra formalización de la aritmética lo menos posible del cálculo cuantificacional clásico del

que ya disponemos, vamos a utilizar implicaciones aritméticas al lado de proposiciones aritméticamente verdaderas.

Las simbolizaremos sin más con $<$, definiéndolas simplemente como sigue:

(1) Para todo axioma C del sistema restringido de Peano ponemos:

$$\forall < C$$

(2) Por cada dos fórmulas A, B ponemos: $A < B$ si A implica lógicamente B.

(3) Poniendo asimismo $A < B$, si $A < C$ y $C < B$ vale para una fórmula C.

Si particularmente en (3) se reemplaza la fórmula A por $\forall$, esta definición expresa que (1) que los axiomas de Peano deben ser considerados como aritméticamente verdaderos y (2), (3) que son verdaderas todas las fórmulas clásicamente l-implicadas por cualquier fórmula aritméticamente verdadera.

Nuestra definición de las implicaciones lógicas clásicas no entraña, hasta ahora, que la relación de implicación lógica sea transitiva, como expresa (3). Esta transitividad únicamente quedará asegurada por la prueba de consistencia del parágrafo siguiente. De momento habremos de postularla con vistas a que la verdad aritmética tenga un sentido.

Tampoco para la lógica constructiva es en modo alguno evidente la transitividad de la implicación lógica. Su prueba podría ser fácilmente establecida a partir del § 7. Renunciamos aquí, no obstante, a ello.

Los axiomas de Peano y la lógica clásica de cuantificadores procuran juntos un cálculo para la derivación de implicaciones aritméticas. Vamos a describirlo, una vez más, globalmente.

Las implicaciones constan de los siguientes símbolos atómicos:

Variables x, y,...

$0, ', (,), +, \cdot, =, \wedge, \vee, \neg, \bigwedge, \bigvee, \forall, \exists, <$.

A partir de los siguientes *términos primitivos:*

las variables x, y,...

0

x'

$(x + y)$

$(x \cdot y)$

son compuestos los *términos* s, t,..., siendo sustituidos en los términos primitivos las variables por términos primitivos o por términos ya formados.

A partir de los términos se construyen *fórmulas atómicas* $a, b, c,\ldots$:

$$(s = t) \text{ incluyendo } \forall \text{ y } \exists$$

que a su vez pueden ser combinadas en fórmulas A, B, C,... del modo siguiente:

$$(A \wedge B), (A \vee B), \neg A, \bigwedge_x A(x), \bigvee_x A(x)$$

Con la ayuda de estas fórmulas se construyen fórmulas conjuntivas $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$ y fórmulas adjuntivas $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$, sin que la asociación ni el orden de sucesión importen. Una fórmula conjuntiva F y una fórmula adjuntiva G dan lugar a las implicaciones $F < G$. De las implicaciones son definidas inductivamente como «derivables» las siguientes:

(6.1) $\forall < s = s$

(6.2) $s = t \wedge A(s) < A(t)$

(6.3) $s' = t' < s = t$

(6.4) $s' = 0 < \exists$

(6.5) $\forall < s + 0 = s$

(6.6) $\forall < s + t' = (s + t)'$

(6.7) $\forall < 0 \cdot t = 0$

(6.8) $\forall < s' \cdot t = s \cdot t + t$

(6.9) $A(0) \wedge \bigwedge_x (\neg A(x) \vee A(x')) < A(t)$

(6.10) $F \wedge c < c \vee G$

(6.11) $F \wedge \wedge < G$

(6.12) $F < \vee \vee G$

(6.13) $F < A \vee G,, F < B \vee G \Rightarrow F < (A \wedge B) \vee G$

(6.14) $F \wedge A < G,, F \wedge B < G \Rightarrow F \wedge (A \vee B) < G$

(6.15) $F \wedge C < G \Rightarrow F < \neg C \vee G$

(6.16) $F < C \vee G \Rightarrow F \wedge \neg C < G$

(6.17) $F < B(y) \vee G \Rightarrow F < \wedge_x B(x) \vee G$

(6.18) $F \wedge \wedge_x A(x) \wedge A(t) < G \Rightarrow F \wedge \wedge_x A(x) < G$

(6.19) $F \wedge A(y) < G \Rightarrow F \wedge \vee_x A(x) < G$

(6.20) $F < B(t) \vee \vee_x B(x) \vee G \Rightarrow F < \vee_x B(x) \vee G$

(6.21) $A < C,, C < B \Rightarrow A < B$

Observaciones: Hay que añadir a (6.17) y (6.19) una condición concerniente a las variables. La variable y no puede figurar libre en la implicación a la derecha de $\Rightarrow$. En la totalidad de las reglas correspondientes a los cuantificadores (6.17)-(6.20) es preciso observar lo siguiente. En ellas figuran cuantificadas las fórmulas $A(x)$ y $B(x)$; la variable libre x ha de ser sustituida por una variable y o por un término t. El resultado de la sustitución viene expresado por $A(y)$ o $A(t)$ y $B(y)$ o $B(t)$. Siempre que nos limitemos a sustituir variables libres por términos constantes no será necesario atenerse a ninguna otra limitación. Pero si introducimos un término no constante t, hay que tomar nota de que las variables libres de t no resultan ligadas en $A(x)$. Para poder deducir por ejemplo

$$\vee < \wedge_x \wedge_y B(x, y)$$

no basta, en efecto, disponer de la implicación

$$\vee < \wedge_y B(y, y)$$

sería preciso tener

$$\vee < \wedge_y B(z, y)$$

con una variable libre z. Si en $\wedge_y B(x, y)$ se sustituye x por y, la y introducida será ligada. Diremos que la variable x no es libre para (la sustitución de) y en $\wedge_y B(x, y)$. Generalmente se dice que una variable x es libre para un término t en $A(x)$, en el caso de que ninguna de las variables libres de t se convierta en ligada al ser sustituida en $A(x)$. A las reglas (6.17)-(6.20) hay que añadir ahora la condición de que la variable x sea libre en $A(x)$ y $B(x)$ para y y para t, respectivamente.

Damos a esta formalización de la aritmética el nombre, simplemente, de formalismo de Peano.

Antes de dedicarnos a la demostración de su consistencia, vamos a reflexionar brevemente acerca del teorema de la deducción para este formalismo. Podemos partir del supuesto de que para unas proposiciones cualesquiera $A_1, \ldots, A_n$ y A tenemos una derivación relativa de la implicación $\vee < A$ a partir de las implicaciones $\vee < A_1, \ldots, \vee < A_n$; acto seguido sostenemos que la implicación $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n < A$ es derivable en sentido absoluto. Para demostrarlo —análogamente a como se procedió en el § 2— bastará con evidenciar que toda derivación relativa se convierte en una derivación igualmente relativa si se sustituyen todas las implicaciones $B_1 < B_2$ en ella ocurrentes por $F \wedge B_1 < B_2$, donde F es una proposición cualquiera (sin variable libre). Si como F tomamos $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, estaremos de hecho ante una derivación relativa de $A_1 \wedge \ldots A_n < A$ a partir de $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n < A_1, \ldots$ La condición de derivables en sentido absoluto de estas implicaciones no es difícil de percibir a la vista de (6.10)-(6.20). Con el fin, por otra parte, de evidenciar que F puede ser añadida a toda derivación relativa, basta, respecto de los axiomas, con lo siguiente: en el caso de que $B_1 < B_2$ sea un axioma, $F \wedge B_1 < B_2$ es absolutamente derivable, dado que lo es a partir de $F \wedge B_1 < B_1$ y $B_1 < B_2$ en virtud de (6.21). En lo que concierne a las reglas (6.13)-(6.20), la adición de una proposición F es trivial. Queda la regla de transitividad (6.21), para la que hay que demostrar que $F \wedge A < B$ resulta asimismo derivable a partir de $F \wedge A < C$ y $F \wedge C < B$. En virtud de la absoluta derivabilidad de $F \wedge A < F$, de $F \wedge A < C$ es inmediatamente derivable $F \wedge A < F \wedge C$; de manera, pues, que juntamente con $F \wedge C < B$ de acuerdo con (6.21) también $F \wedge A < B$.

Con lo cual queda demostrado el teorema de la deducción.

Como consistencia del formalismo de Peano hay, en realidad, que entender que en dicho formalismo no ocurra ninguna fórmula C tal que puedan derivarse a un tiempo a partir de ella $\vee < C$ y $\vee < \neg C$. De acuerdo con la lógica clásica, de $\vee < \neg C$ se obtiene inmediatamente $C < \wedge$. A partir de $\vee < C$ y $C < \wedge$ se obtendría, pues, también $\vee < \wedge$ en virtud de (6.21). Para todo par de fórmulas A, B se obtendría asimismo $A < B$ en virtud de las implicaciones fundamentales $A < \vee$ y $\wedge < B$. En cuanto a la consistencia, bastará, pues, con mostrar que por lo menos una implicación no resulta derivable en el formalismo de Peano.

Por muy fácil que así enunciada parezca la tarea de demostrar la consistencia de la aritmética clásica, no deja de ser cierto que durante mucho tiempo se ha revelado como una meta extremadamente difícil de alcanzar. La raíz de esta dificultad fue apuntada por GÖDEL en 1931 en relación con su teorema de incompletitud *(vid.* § 12). Hay quien ha llegado incluso a creer imposible dicha demostración de consistencia. De ahí que la demostración efectuada por GENTZEN en 1936 fuera largamente incomprendida.

La idea básica de la demostración de la consistencia a cuya exposición vamos a proceder seguidamente no es otra que la oposición al formalismo de Peano de otra formalización de la aritmética trivialmente consistente, pero a propósito de la que quepa mostrar la derivabilidad de todas las implicaciones derivables en el formalismo de Peano. Este nuevo formalismo se distingue del de Peano no sólo por proceder, característicamente, con reglas finitas, es decir, con reglas que constan de un número finito de premisas, sino por contener asimismo una regla infinita, la inducción infinita:

$$I(0),, I(0'),, I(0''),, \ldots\ldots \Rightarrow I(x)$$

Aquí $I(x)$ es una implicación cualquiera del tipo $A(x) < B(x)$ e $I(n)$ designa la implicación $A(n) < B(n)$.

Esta inducción infinita presupone, naturalmente, la utilización de un cuantificador universal en el metalenguaje (en nuestra notación: $\bar{\wedge}_n$, es decir, para todo n):

$$\bar{\wedge}_n I(n) \Rightarrow I(x)$$

¿Tiene un sentido d-definido la aplicación de semejante cuantificador universal en una definición inductiva (la clase de las implicaciones «derivables» es, en efecto, definida)? Para responder a esta pregunta habremos de enunciar primero las restantes reglas (finitas) de la nueva formalización.

La definición de los términos, fórmulas e implicaciones se toma del propio formalismo de Peano. Sobre la base de la aritmética constructiva (o, si se prefiere, del axioma (5.9) de Peano y del axioma de igualdad únicamente) cabe dividir de manera efectiva las proposiciones atómicas, es decir, las fórmulas primitivas del tipo $s = t$, con términos constantes s, t, incluidos $\vee$ y $\wedge$, en «verdaderas» y «falsas». $\vee$ vale, naturalmente, como verdadero y $\wedge$ como falso. Como únicas implicaciones básicas tomamos ahora:

(6.22) $\qquad F \wedge a < b \vee G$

en las que a es una proposición atómica falsa o b es una proposición atómica verdadera. Estas implicaciones (6.22) deben sustituir a todas las implicaciones básicas (6.1)-(6.12) del formalismo de Peano.

Las reglas lógicas (6.13)-(6.20) del formalismo de Peano son aprehendidas sin modificación alguna. Se abandona, por el contrario, la regla de transitividad (6.21), tomando en su lugar la inducción infinita:

(6.23) $\qquad \bar{\wedge}_n A(n) < B(n) \Rightarrow A(x) < B(x)$

Dado que el término «formalismo» es usado a menudo en el mismo sentido en que nosotros empleamos la palabra «cálculo», es decir, únicamente para sistemas con reglas finitas, vamos a dar al nuevo sistema de reglas —siguiendo a SCHÜTTE (1960)— el nombre de *semiformalismo*. Al formalismo de Peano le daremos, en cambio, más exactamente el nombre de *formalismo completo*.

Nuestro semiformalismo consta, pues, del cálculo clásico de cuantificadores, al que se han unido las implicaciones aritméticas básicas (6.22) y la inducción infinita (6.23). Si se sustituyera el cálculo clásico de cuantificadores por el constructivo, reduciendo

paralelamente (6.22) a las implicaciones básicas de la forma

$$F \wedge a < b$$

tendríamos un semiformalismo que no se diferenciaría prácticamente de la aritmética constructiva (sin pasar, claro es, en ella de la adición y de la multiplicación). A las proposiciones atómicas han de unirse las deducciones lógico-constructivas, y en virtud de la inducción infinita las variables libres x tendrán como valores las cifras 0, 0′, 0″,... y *sólo* ellas.

En lo concerniente al cálculo clásico de cuantificadores la situación es distinta. No se dispone de interpretación para las partículas lógicas. Unicamente se cuenta con las reglas del semiformalismo a las que hay que ceñirse. Si en un diálogo se afirma la derivabilidad de una implicación en el semiformalismo, ¿qué ha de hacer el proponente P para ganar? El oponente O no puede exigirle que —como en el caso de un formalismo completo— escriba una derivación. El eventual recurso a la inducción infinita lo hace imposible. En un semiformalismo, pues, la derivabilidad no es p-definida. No obstante, es d-definida si el diálogo transcurre así: si O pone en duda la afirmación de la derivabilidad de una implicación I_0, P tendrá que indicar a partir de qué regla del semiformalismo se llega a la conclusión I_0. En el caso de que esta regla tenga varias premisas (eventualmente infinitas), O está en el derecho de escoger las que P tenga que defender. P ha de proseguir de este modo el diálogo hasta que sólo le quede por defender una implicación básica.

Vamos a ilustrar este procedimiento con un ejemplo sencillo, pongamos por caso con la implicación:

$$x' = y' < x = y$$

P indicará que esta implicación ha de ser derivada acudiendo a la inducción infinita respecto de x. O tendrá acto seguido que elegir una cifra m para x, defendiendo P a su vez $m' = y' < m = y$. Aducirá de nuevo la inducción infinita como regla en esta ocasión respecto de y. O elige la cifra n. P tendrá, pues, que defender la implicación $m' = n' < m = n$. Si O ha elegido de tal manera que $m = n$ es verdadera, estaremos ante una implicación básica. Si la elección de O ha sido, por el contrario, tal que $m \neq n$ es verdadera, $m' = n'$ será falsa, de tal modo que también en este caso estaremos ante una implicación básica. Para tener la seguridad de poder ganar siempre con esta estrategia, P habrá de admitir, por supuesto, la fundamentación del axioma de Peano $x' = y' < x = y$ en el dominio de la aritmética constructiva.

En los casos más complicados se presenta la dificultad de que la extensión del diálogo dependa de las elecciones de O. En el caso más desfavorable puede presentarse la siguiente situación:

O teme que P no llegue nunca a acabar el diálogo, es decir, que a pesar de que O elija adecuadamente, P no llegue nunca a una implicación básica. P, por el contrario, asegura —al margen, por así decirlo, del juego oficial— que «pronto» llegará al final y ganará. ¿Está O obligado a aceptar estas seguridades? En realidad, esto es algo sobre lo que ambos partícipes en el diálogo han de ponerse de acuerdo, y, a ser posible, antes de comenzar el juego. En el caso de que O no quiera participar en unos diálogos de duración indeterminada, puede proponer un reforzamiento del juego consistente en que cada vez que P afirme una implicación, aduzca también el «número de paso» más alto en el que se obliga a acabar. Si O escoge una premisa en una de las reglas citadas por P, éste habrá de sostener dicha premisa en un número de paso menor, y así sucesivamente. Con lo que O dispone, al menos, de cierta idea global de la posible duración del diálogo. Si P accede al paso número cero sin haber accedido así a una implicación básica, ha perdido. Y ha perdido por mucho que aún le fuera posible defender la última implicación afirmada, en el caso de que se le concedieran más pasos.

A pesar de esta propuesta de reforzar el diálogo con la ayuda de los números de paso, aún queda un problema pendiente, es decir, qué es lo que puede ser admitido como «número de paso». En el caso de cuantificadores encadenados unos a otros puede ocurrir que los números naturales no puedan numerar los correspondientes números de cada paso. De ahí que deban ser admitidos también los llamados ordinales transfinitos, como ω, $\omega + \omega$, ω^{ω},... Unicamente serán aceptados, desde luego, aquellos números ordinales de los que se disponga en el contexto de la matemática constructiva. De todos modos, no deja de ser cierto que la clase de los números ordinales «constructivos» queda así tan escasamente delimitada, en un sentido último, como la matemática constructiva misma. En lo concerniente a nuestro problema de

la consistencia de la aritmética clásica, este carácter abierto de la clase de los números ordinales constructivos no presenta dificultad alguna. De la prueba de GENTZEN se desprende que para toda implicación derivada en el formalismo de Peano basta como número de paso un número ordinal inferior a $\varepsilon_0 = \cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\omega}}}}}$ para su derivación en el semiformalismo. (*Vid.* SCHÜTTE (1960), especialmente § 20.)

Puede verse, por otra parte —en relación, una vez más, con el teorema de incompletitud de GÖDEL—, que para todo número ordinal recursivamente definido al que se pretendiera fijar como número de paso más alto, habrían más implicaciones; implicaciones derivables, desde luego, pero no en dicho número de paso.

De ahí que renunciemos al reforzamiento del semiformalismo con la ayuda de los números de paso y mostremos, en primer lugar, en qué sentido es el semiformalismo una semiformalización «completa» de la aritmética clásica.

Nos remitimos para ello a la completitud del cálculo clásico de yuntores en el § 3. Allí quedó demostrada la derivabilidad de toda implicación (clásica) lógicamente válida entre fórmulas de la lógica de yuntores. Vamos a trasponer en forma adecuada esta completitud al semiformalismo de la aritmética. Para ello habremos de definir qué cabe entender como implicación aritméticamente válida. Lo cual ocurrirá extendiendo los predicados «verdadero» y «falso» a proposiciones aritméticas cualesquiera (es decir, a fórmulas sin variables libres), de acuerdo con la siguiente definición inductiva:

(1) En lo concerniente a las proposiciones atómicas, como hasta ahora.

(2)	A verdadera,, B verdadera	$\Rightarrow$	$A \wedge B$	verdadera
	A falsa	$\Rightarrow$	$A \wedge B$	falsa
	B falsa	$\Rightarrow$	$A \wedge B$	falsa
(3)	A verdadera	$\Rightarrow$	$A \vee B$	verdadera
	B verdadera	$\Rightarrow$	$A \vee B$	verdadera
	A falsa,, B falsa	$\Rightarrow$	$A \vee B$	falsa
(4)	A falsa	$\Rightarrow$	$\neg A$	verdadera
	A verdadera	$\Rightarrow$	$\neg A$	falsa

(5)	$\bigwedge_n$	$A(n)$ verdadera	$\Rightarrow$	$\bigwedge_x A(x)$	verdadera
		$A(n)$ falsa	$\Rightarrow$	$\bigwedge_x A(x)$	falsa
(6)		$A(n)$ verdadera	$\Rightarrow$	$\bigvee_x A(x)$	verdadera
	$\bigwedge_n$	$A(n)$ falsa	$\Rightarrow$	$\bigvee_x A(x)$	falsa

Esta es la llamada definición semántica de la verdad (y de la falsedad). También utiliza dos veces un cuantificador universal del metanivel. Esta definición es una definición inductiva de los predicados verdadero y falso. En virtud de esta definición los predicados son d-definidos, incluso sin determinación de un número ordinal como número de paso. En efecto, si se pasa de una proposición de la forma «A verdadera» o «A falsa» a una de las premisas posibles de acuerdo con las reglas (1)-(6), y luego otra vez a una premisa, y así sucesivamente, al cabo de un número finito de pasos, se llega siempre a la verdad o falsedad de las proposiciones atómicas. De ahí que la definición semántica de la verdad sea una definición «fundada».

Contrariamente al uso de esta definición en la semántica (que presupone una metalógica clásica y por lo general incluso una teoría de conjuntos) no afirmamos aquí que en virtud de la definición semántica sea posible ordenar a toda proposición exactamente uno de los predicados «verdadero» o «falso». Esto vendría a significar que en lugar de la lógica constructiva nos serviríamos en la metamatemática de la lógica clásica como instrumento. Concebimos más bien (1)-(6) como un semiformalismo, únicamente, para la derivación de metaproposiciones de la forma «A verdadera» o «A falsa», respectivamente. Damos a este formalismo el nombre de semiformalismo semántico. No es difícil ver que constructivamente no hay fórmula alguna que de acuerdo con este semiformalismo pueda ser a un tiempo verdadera y falsa. Esto vale para las fórmulas atómicas, y vale, por ejemplo, para $A \wedge B$ si vale para A y B. Por lo demás, la cosa es igual de fácil respecto de las composiciones $A \vee B$, $\neg A$, $\bigwedge_x A(x)$ y $\bigvee_x A(x)$.

En cuanto a la definición de implicaciones «válidas» y «no válidas», añadimos al semiformalismo semántico:

(7)	A falsa	$\Rightarrow$	$A < B$	válida
	B verdadera	$\Rightarrow$	$A < B$	válida
	A verdadera,, B falsa	$\Rightarrow$	$A < B$	no válida

y para las implicaciones $I(x)$ con una variable libre x:

(8) $\overline{\wedge}_n$ $I(n)$ válida $\Rightarrow$ $I(x)$ válida
$I(n)$ no válida $\Rightarrow$ $I(x)$ no válida.

También en lo que a esto concierne podría afirmarse, con la sola ayuda de la metalógica clásica, que toda implicación es válida o no válida. Desde el ángulo constructivo vale, otra vez, únicamente que no hay implicación que pueda ser a un tiempo válida y no válida. Lo que significa que de «válido» puede pasarse a «no in-válido» y de «in-válido» a «no-válido», pero no a la inversa.

La aparición de un concepto como el de «no in-válido» al lado de la validez es característica de la matemática constructiva.

Algo similar ocurre con la derivabilidad de las implicaciones en nuestro semiformalismo aritmético. Esta derivabilidad viene definida por la existencia de una estrategia de ganancia. En lo concerniente a los semiformalismos no basta con escribir simplemente una derivación (finita). Tampoco se dan en este contexto derivaciones en el sentido de los formalismos completos. Una estrategia de ganancia no puede ser descrita en el lenguaje objeto; se trata más bien de unas instrucciones metalingüísticas en las que los medios metalingüísticos comienzan por ser dejados abiertos. La clase de todas las estrategias de ganancia exigibles para nuestra prueba de consistencia puede ser definida, de todos modos —con la ayuda de números de paso inferiores a ε_0—, de manera constructiva.

Para nuestro actual objetivo —la trasposición de la completitud de la lógica clásica de yuntores al semiformalismo aritmético— bastará una ojeada a las estrategias de ganancia; cosa que haremos como sigue. Si I es una implicación que debe ser defendida, convendrá examinarla primero con vistas a averiguar qué reglas del semiformalismo son las que, en general, permiten obtener I como conclusión. Si I contiene una variable libre, cabrá aplicar la inducción infinita. Si escribimos la implicación como $I(x)$, las premisas $I(n)$ podrán recibir el nombre de «antecedentes» de $I(x)$.

Si I no contiene ninguna variable libre, pero contiene a la derecha de $<$ una de las partículas $\neg$, $\vee$, $\bigvee$, o a la izquierda de $<$ una de las partículas $\neg$, $\wedge$, $\bigwedge$, será aplicable una de las reglas

(6.13)-(6.16), (6.17) o (6.19). Las premisas de las reglas así aplicables podrán recibir también el nombre de «antecedentes» de I.

Quedan las implicaciones llamadas «críticas» por SCHÜTTE, de la forma

$$F \wedge \bigwedge_{x1} A_1(x_1) \wedge \bigwedge_{x2} A_2(x_2) \wedge \ldots < \bigvee_{y1} B_1(y_1) \vee \bigvee_{y2} B_2(y_2) \vee \ldots \vee G$$

y las implicaciones primitivas

$$F < G$$

en las que F y G únicamente tienen proposiciones atómicas como miembros.

Una implicación primitiva es derivable si y sólo si es una implicación básica —lo que únicamente ocurre si y sólo si es válida.

En el caso de una implicación crítica I cabe aplicar las reglas (6.18) o (6.20). Se obtienen «antecedentes» de I reemplazando un miembro $\bigwedge_x A(x)$ por $\bigwedge_x A(x) \wedge A(m)$ o un miembro $\bigvee_y B(y)$ por $\bigvee_y B(y) \vee B(n)$. Dejamos asimismo sentado que las implicaciones surgidas a raíz de una sustitución simultánea de varios miembros pueden ser llamadas también «antecedentes» de la implicación crítica I. Para volver a I a partir de un antecedente de este tipo hay que aplicar de nuevo las reglas (6.18) y (6.20).

Una implicación básica no puede tener antecedente alguno.

En el curso de un diálogo para la defensa de una implicación I se encuentran «sucesiones de antecedentes» de I. Estas sucesiones de antecedentes $I_0, I_1, I_2, \ldots$ comienzan por $I_0 = I$, y todo miembro I_{n+1} ha de ser un antecedente de I_n. Exigimos, por otra parte, que las sucesiones de antecedentes o bien sean infinitas, o bien acaben en una implicación primitiva o en una implicación básica.

La definición semántica de «verdadero» y «falso» y, respectivamente, de «válido» y «no válido» da lugar de inmediato a lo siguiente: si I es una implicación válida, todos los miembros de una sucesión de antecedentes de I son asimismo válidos. Una sucesión finita de antecedentes de una implicación válida acaba, pues, en una implicación básica o en una implicación primitiva, válida, o sea, en cualquier caso en una implicación básica.

Vamos a construir acto seguido sucesiones particulares de antecedentes de I, mostrando que en el caso de que se pueda construir una sucesión infinita particular de antecedentes, I no es válida. Si se quisiera aplicar en nuestras reflexiones la lógica clásica, cabría «inferir» la completitud como sigue:

Si I es válida, no es, pues, no-válida, y no puede construirse sucesión particular alguna infinita de antecedentes, es decir, que toda sucesión particular de antecedentes es (en sentido clásico) finita, toda sucesión particular de antecedentes acaba en una implicación básica. Existe, pues (en sentido clásico), una estrategia de ganancia.

En todo caso, sobre la base de estos argumentos no cabe procurar constructivamente una estrategia de ganancia, dado que del hecho de que no exista ninguna sucesión particular infinita de antecedentes no se deriva nada acerca de la extensión de las sucesiones de antecedentes. Unicamente se puede estar seguro de que no hay oponente en posesión de una estrategia de ganancia.

La construcción de sucesiones particulares de antecedentes susceptibles de conducir a este resultado es sencilla:

Acordamos como estrategia del proponente que

1) en el caso de una implicación $I(x)$ con una variable libre se tome como antecedente una premisa de una inducción infinita,

2) en el caso de una implicación no crítica I sin variable libre se tome como antecedente una premisa de una de las reglas (6.13)-(6.16), (6.17) o (6.19),

3) en el caso de una implicación crítica I se tome el antecedente resultante de la sustitución de todos los miembros $\wedge_x A(x)$ por $\wedge_x A(x) \wedge A(m)$ y, al mismo tiempo, de la sustitución de todos los miembros $\vee_y B(y)$ por $\vee_y B(y) \vee B(n)$. Las cifras m y n representan en este contexto el número de implicaciones críticas que figuran ya como antecedentes de I y que contienen, respectivamente, $\wedge_x A(x)$ o $\vee_y B(y)$ como miembros.

De hecho, esta estrategia del proponente garantiza que las elecciones del oponente no pueden conducir a una sucesión infinita de antecedentes sino en el caso de una implicación no válida. Para probarlo mostramos que todas las implicaciones de una sucesión particular de antecedentes son no-válidas. Efectivamente, todas las proposiciones que figuran como antecedentes son verdaderas y todas las que, por el contrario, figuran como consecuentes, falsas. Esta última afirmación resulta, sin duda, válida respecto de las proposiciones atómicas, dado que, de lo contrario, una de las implicaciones sería una implicación básica, y la sucesión de antecedentes sería, en consecuencia, finita. Admitamos ahora que la afirmación en juego resulte asimismo aplicable a las fórmulas parciales de una fórmula compuesta, demostrando así (por inducción a partir de estas fórmulas parciales) que dicha afirmación se aplica a la fórmula total. Si, por ejemplo, $A \vee B$ figura como antecedente, A o B figurará también (por construcción) en la sucesión particular de antecedentes. Si A es verdadera o B es verdadera, también lo será $A \vee B$. Si $\neg A$ figura como antecedente, A figurará como consecuente. Si A es falsa, $\neg A$ será verdadera.

Si $\vee_x A(x)$ figura como antecedente, también $A(y)$ con una variable y y, en consecuencia, $A(n)$ con una cifra n. Si $A(n)$ es verdadera, también lo será $\vee_x A(x)$. Si $\wedge_x A(x)$ figura, en fin, como antecedente, también $A(n)$, y ello para toda cifra n, dado que en una sucesión infinita de antecedentes ha de presentarse un número infinito de implicaciones críticas. De manera, pues, que por hipótesis de inducción todas las fórmulas $A(n)$ son verdaderas y, en consecuencia, también $\wedge_x A(x)$ lo es.

Exactamente lo mismo ocurre con los consecuentes; todos son falsos. Todas las implicaciones de la sucesión particular de antecedentes y, sobre todo, de la implicación de partida son no-válidas.

Si el proponente comienza con una implicación no-válida y acude a la estrategia particular dada, el oponente no podrá procurar, con sus elecciones, una sucesión infinita de antecedentes. A esto añadimos que tampoco podrá procurar una sucesión finita de antecedentes que no acabe en una implicación básica. Porque de resultarle tal cosa posible, acabaría en una implicación primitiva que no sería una implicación básica, es decir, que no sería válida. De todos modos, si en una sucesión de antecedentes se presenta una implicación no-válida, todas las implicaciones anteriores serán igualmente no-válidas, como se desprende de inmediato de la definición semántica de la verdad.

Ahora bien, esta completitud que era preciso determinar en el seno de la matemática constructiva (únicamente hay contra-estrategias para las implicaciones no-válidas) aún no justifica la lógica clásica de cuantificadores. De manera constructiva no podemos inferir que únicamente resultan derivables las implicaciones válidas. En lugar de ello demostraremos constructivamente en el próximo parágrafo la consistencia del formalismo de Peano.

§ 7. Consistencia de la aritmética clásica

Hemos visto en el § 6 cómo la consistencia del formalismo de Peano es equivalente a la no-derivabilidad de por lo menos una implicación, de la implicación $\vee < \wedge$, por ejemplo.

La consistencia del semiformalismo aritmético en el sentido de que no resulte derivable $\vee < \wedge$ es, en realidad, trivial.

$\vee < \wedge$ no es, en efecto, ninguna implicación básica, pero —al igual que toda implicación primitiva— carece de antecedentes. En consecuencia, no puede ser defendida.

Todo esto permite demostrar la consistencia del formalismo de Peano como sigue: hay que demostrar que a la clase de las implicaciones derivables dentro del semiformalismo no se le añaden nuevas implicaciones, aunque al semiformalismo se le añadan además todas las implicaciones básicas (axiomas) y reglas del formalismo de Peano.

En lo concerniente a los axiomas, la cosa no es demasiado difícil: todos son derivables en el semiformalismo (no transformado). Sólo queda por demostrar que la regla de transitividad es «admisible», es decir, que una implicación $A < B$ siempre es derivable en el semiformalismo si $A < C$ y $C < B$ lo son.

Es posible que esta demostración de la consistencia del formalismo de Peano pasando por el semiformalismo tenga, en principio, todo el aspecto de un rodeo. Sin embargo, queda justificada en la medida en que no sólo nos proporciona la nuda consistencia del formalismo de Peano, sino también su ω-consistencia. He aquí lo que cabe entender como tal: se dice que una formalización de la aritmética es ω-consistente cuando de ninguna fórmula $A(x)$ pueden derivarse a un tiempo las especializaciones

$$A(0),\ A(0'),\ A(0''),\ \ldots$$

y la fórmula con el cuantificador universal precedido de negación $\neg \wedge_x A(x)$.

En el supuesto de que hubiéramos alcanzado nuestra meta y estuviera ya demostrada la consistencia del formalismo de Peano, incluso con la inclusión de la inducción infinita, dicha ω-consistencia resultaría evidente. En efecto, si todas las especializaciones $\vee < A(n)$ de la implicación $\vee < A(x)$ son derivables, esta última lo es también —en el semiformalismo— y asimismo lo es $\vee < \wedge_x A(x)$. El semiformalismo sería, pues, *inconsistente* si $\vee < \neg \wedge_x A(x)$ fuera también derivable.

Vamos a proceder ahora a probar la consistencia. La derivabilidad de los axiomas (6.11)-(6.12) en el semiformalismo es trivial, dado que en ese contexto son implicaciones básicas. Lo cual vale también para (6.10) en el caso de que c sea una fórmula atómica sin variable libre. En cuyo caso, c es verdadera o es falsa. De donde hay o bien a la izquierda una proposición atómica falsa o bien hay a la derecha una verdadera. Si c contiene variables libres, todas las especializaciones de (6.10) serán derivables, es decir, lo será incluso (6.10), de acuerdo con la inducción infinita.

Los restantes axiomas del formalismo de Peano pueden ser tratados de manera igualmente trivial, a excepción de (6.2) y (6.9), donde figuran fórmulas discrecionales. Es decir, si las s y t que figuran en ellos son constantes, habrá siempre a la izquierda una proposición atómica falsa o a la derecha una verdadera: así son definidos justamente «verdadero» y «falso». Si s y t no son constantes, será preciso acudir de nuevo a la inducción infinita.

También en lo concerniente a (6.2) basta con limitarse a los términos constantes s y t. Si en tal caso la fórmula atómica $s = t$ es falsa, (6.2) será una implicación básica. Queda por considerar el caso de que $s = t$ sea verdadera. Si $A(s)$ es una fórmula atómica, como, por ejemplo, $u(s) = v(s)$, con términos en los que eventualmente figura s, aún se tendrá que derivar

$$s = t \wedge u(s) = v(s) < u(t) = v(t)$$

Si las variables libres que aparecen en $u(s)$ y $v(s)$ son reemplazadas

por cifras, quedarán las implicaciones básicas, ya que no puede ocurrir que $s = t$ y $u(s) = v(s)$ sean verdaderas y, al mismo tiempo, $u(t) = v(t)$ sea falsa.

Vamos a probar la derivabilidad de

$$s = t \wedge A(s) < A(t)$$

por inducción a partir de fórmulas parciales en relación con $A(s)$. Para ello establecemos previamente un lema general para el semiformalismo:

La regla

$$A < B \Rightarrow F \wedge A < B \vee G \tag{7.1}$$

es admisible.

Se dice que la implicación derecha tiene su origen «por atenuación» de la izquierda. La prueba ha de discurrir como en el caso del teorema de deducción. Todas las implicaciones que figuran en la derivación de $A < B$ son atenuadas con F y G. De este modo las implicaciones básicas son transformadas en otras nuevas, y las nuevas premisas llevan —de acuerdo con las mismas reglas que antes— a las nuevas conclusiones.

Ahora podemos pasar de

$$s = t \wedge A(s) < A(t)$$

y

$$s = t \wedge B(s) < B(t)$$

a

$$s = t \wedge A(s) \wedge B(s) < A(t) \wedge B(t)$$

es decir, primero por atenuación a

$$s = t \wedge A(s) \wedge B(s) < A(t)$$

y

$$s = t \wedge A(s) \wedge B(s) < B(t)$$

Acto seguido hay que aplicar la regla (6.13).

De igual manera podemos obtener

$$s = t \,\dot{\wedge}\, A(s) \vee B(s) < A(t) \vee B(t)$$

Las restantes composiciones con $\neg$, $\wedge_x$, $\vee_x$ son fáciles de ultimar por inducción a partir de fórmulas parciales. Se trata, simplemente, de una modificación del razonamiento llevado a cabo para el lema al final del § 2. Esta inducción a partir de fórmulas parciales nos lleva, asimismo, a la derivabilidad de las implicaciones

$$A < A \tag{7.2}$$

Con esta reflexividad puede ser manejado fácilmente el axioma de inducción. Hacemos ver que para toda cifra n es derivable

$$A(0) \wedge \wedge_x . \neg A(x) \vee A(x') . < A(n)$$

Para $n = 0$ esto se sigue por atenuación de

$$A(0) < A(0)$$

Si la derivabilidad ya está probada para n, se sigue para n' del siguiente modo:

$$\frac{\begin{array}{l} A(0) \wedge \wedge_x . \neg A(x) \vee A(x') . < A(n) \vee A(n') \\ A(0) \wedge \wedge_x . \neg A(x) \vee A(x') . \wedge \neg A(n) < A(n') \\ A(0) \wedge \wedge_x . \neg A(x) \vee A(x') . \wedge A(n') < A(n') \end{array}}{\begin{array}{r} A(0) \wedge \wedge_x . \neg A(x) \vee A(x') . \,\dot{\wedge}\, \neg A(n) \vee A(n') < A(n') \\ A(0) \wedge \wedge_x . \neg A(x) \vee A(x') . < A(n') \end{array}}$$

Con lo cual queda probada la derivabilidad de todos los axiomas del formalismo de Peano. Para la prueba de la consistencia únicamente falta ya por probar la admisibilidad de la transitividad en el semiformalismo, lo que, en realidad, no deja de ser sustantivamente sencillo: se trata de proceder a una inducción por fórmulas parciales para cuyos pasos de inducción hay que usar, ocasionalmente, inducciones de premisas (véase abajo). Algo más generalmente probamos la admisibilidad de

$$F < C \vee G,, F \wedge C < G \Rightarrow F < G \tag{7.3}$$

La transitividad se deriva inmediatamente de la «regla de ruptura» (7.3), ya que de $F < C$ y $C < G$ resultan, por atenuación, las premisas $F < C \vee G$ y $F \wedge C < G$.

Antes de entrar en la prueba conviene observar que las «inversiones» de las reglas del semiformalismo son válidas.

Con ello aludimos a

(7.4) $F < A \wedge B \dot{\vee} G \Rightarrow F < A \wedge G$

$F < A \wedge B \dot{\vee} G \Rightarrow F < B \vee G$

(7.5) $F \dot{\wedge} A \vee B < G \Rightarrow F \wedge A < G$

$F \dot{\wedge} A \vee B < G \Rightarrow F \wedge B < G$

(7.6) $F < \neg C \vee G \Rightarrow F \wedge C < G$

$F \wedge \neg C < G \Rightarrow F < C \vee G$

(7.7) $F < \bigwedge_x B(x) \vee G \Rightarrow F < B(y) \vee G$

(7.8) $F \wedge \bigvee_x A(x) < G \Rightarrow F \wedge A(y) < G$

(7.9) $A(x) < B(x) \Rightarrow A(n) < B(n)$

En lo que concierne a las reglas (6.18) y (6.20) no es necesario efectuar las inversiones mismas, dado que en este caso las premisas surgen por atenuación a partir de la conclusión.

Pasamos primero a la prueba de la admisibilidad de (7.4). Podrá verse en seguida que las pruebas de las restantes inversiones obedecen a esta misma muestra. La admisibilidad de (7.4) no es sino un enunciado acerca de todas las implicaciones derivables en el semiformalismo. Enuncia, en efecto, que para toda implicación *I derivable*, vale:

(7.10) Si I tiene la forma $F < A \wedge B \dot{\vee} G$, entonces $F < A \vee G$ es derivable.

Una afirmación como ésta puede ser probada por «inducción a partir de premisas», es decir, se la demuestra

1) para todas las implicaciones básicas I,

2) para las conclusiones de las reglas del semiformalismo,

suponiendo que sus premisas sean derivables y que el enunciado sea válido para estas premisas.

Para las implicaciones básicas, (7.10) es trivial, ya que éstas no tienen la forma $F < A \wedge B \dot{\vee} G$. Quedan, pues, por examinar las reglas (6.13)-(6.20) y (6.23).

La conclusión de (6.13) es $F < A \wedge B \dot{\vee} G$, una de sus premisas es $F < A \vee G$. Si G tiene la forma $A' \wedge B' \dot{\vee} G'$, entonces $F < A \dot{\vee} A' \wedge B' \vee G'$ y $F < B \dot{\vee} A' \wedge B' \dot{\vee} G'$ son las premisas. Por hipótesis de inducción $F < A \vee A' \vee G'$ y $F < B \vee A' \vee G'$ son derivables y, en consecuencia, también lo es $F < A \wedge B \dot{\vee} A' \vee G'$.

Para las restantes reglas (6.14)-6.20) y (6.23), la prueba discurre de manera análoga. Vamos a efectuarla únicamente para (6.23). La conclusión es $I(x)$. Si $I(x)$ tiene la forma $F(x) < A(x) \wedge B(x) \dot{\vee} G(x)$, entonces $F(n) < A(n) \wedge B(n) \dot{\vee} G(n)$ son las premisas. Por hipótesis de inducción será

$F(n) < A(n) \vee G(n)$ derivable para todo n, y, en consecuencia, también $F(x) < A(x) \vee G(x)$.

Como se ve, la aparición de un número infinito de premisas no ejerce influencia alguna sobre la marcha de la prueba. Queda así probada la admisibilidad de (7.4). La prueba de (7.5) discurre de manera dual.

En lo tocante a (7.6) hay que probar por inducción a partir de las premisas que para toda implicación *I derivable*, vale:

(7.11) Si I tiene la forma $F < \neg C \vee G$, entonces es derivable $F \wedge C < G$.

Para las implicaciones básicas I, (7.11) es trivial.

La conclusión de (6.13) es $F < A \wedge B \dot{\vee} G$. Si G tiene la forma $\neg C \vee G'$, entonces $F < A \vee \neg C \vee G'$ y $F < B \vee \neg C \vee G'$ son las premisas. Por hipótesis de inducción $F \wedge C < A \vee G'$ y $F \wedge C < B \vee G'$ son derivables y, en consecuencia, también lo es $F \wedge C < A \wedge B \dot{\vee} G'$.

Las restantes reglas han de ser tratadas de manera análoga.

La admisibilidad de la segunda regla de (7.6) se obtiene de igual modo. La prueba de la admisibilidad de (7.7) y (7.8) por inducción a partir de las premisas no se diferencia en nada de estas muestras. Lo cual puede decirse también respecto de (7.9), porque

tampoco aquí causa dificultad alguna el número infinito de premisas.

Podemos, pues, considerar probadas todas las inversiones y pasamos a (7.3).

Se trata en este caso de probar que para toda fórmula C y para cada dos implicaciones I_1 e I_2 *derivables*, vale:

(7.12) Si I_1 e I_2 tienen las formas $F < C \vee G$ y $F \wedge C < G$, entonces $F < G$ es derivable.

Vamos a efectuar la prueba por inducción a partir de las fórmulas parciales relativamente a C. Sea C en principio una proposición atómica c. Procedemos ahora por inducción de premisas relativamente a I_1 e I_2. Si $F < c \vee G$ es una implicación básica y c es falsa, $F < G$ habrá de ser una implicación básica. Igualmente si $F \wedge c < G$ es una implicación básica y c es verdadera.

Si $F < c \vee G$ es la conclusión de una regla, de (6.17), por ejemplo, entonces G tendrá la forma $\wedge_x B(x) \vee G'$ y la premisa será $F < c \vee B(y) \vee G'$. Por inversión de (6.17), $F \wedge c < G$ da, sin embargo, $F \wedge c < B(y) \vee G'$. La hipótesis de inducción a partir de las premisas da, pues, $F < B(y) \vee G'$ y por (6.17) se sigue $F < \wedge_x B(x) \vee G'$, o sea: $F < G$.

Todas las demás reglas habrán de ser tratadas de igual modo, incluso en el caso de que $F \wedge c < G$ sea la conclusión de una regla.

Queda así probada (7.12) para las proposiciones atómicas C. Si C es una fórmula atómica con variables libres, bastará con especializar discrecionalmente las variables libres en I_1 e I_2. Se obtienen así todas las especializaciones de $F < G$ y, con ello, la propia $F < G$.

Para nuestra inducción a partir de las fórmulas parciales de C admitamos que C sea compuesta y que (7.12) sea válida para sus componentes.

Sea, pues, C de la forma $C_1 \wedge C_2$. Tenemos así la derivabilidad de $F < C_1 \wedge C_2 \vee G$ y de $F \wedge C_1 \wedge C_2 < G$. Por inversión de (6.13) se obtiene $F < C_1 \vee G$ y $F < C_2 \vee G$ y por atenuación $F \wedge C_1 < C_2 \vee G$. La hipótesis de inducción lleva, pues, en principio a $F \wedge C_1 < G$ y acto seguido a $F < G$.

La composición a partir de $\vee$ ha de ser tratada de manera dual. Si tenemos que habérnoslas con implicaciones $F < \neg C \vee G$ y $F \wedge \neg C < G$ obtendremos por inversión $F \wedge C < G$ y $F < C \vee G$, o sea, $F < G$ por hipótesis de inducción.

Queda el caso de $F < \wedge_x C(x) \vee G$ y $F \wedge \wedge_x C(x) < G$. Aquí tenemos como hipótesis de inducción que (7.12) vale para toda fórmula $C(t)$. El procedimiento de prueba utilizado hasta ahora no sirve, ya que respecto de $F \wedge \wedge_x C(x) < G$ no puede obtenerse ninguna inversión en la que la fórmula $\wedge_x C(x)$ desaparezca. De ahí que tengamos que hacer uso una vez más de la inducción a partir de premisas relativamente a $F \wedge \wedge_x (x) < G$. Si se trata de una implicación básica, también lo será $F < G$. Supongamos ahora que $F \wedge \wedge_x C(x) < G$ sea la conclusión de una regla, de (6.15), por ejemplo, con un G de la forma $\neg C' \vee G'$. La premisa es $F \wedge \wedge_x C(x) \wedge C' < G'$. De $F < \wedge_x C(x) \vee G$ se deduce por inversión $F \wedge C' < \wedge_x C(x) \vee G'$. Por hipótesis de inducción a partir de inducción por premisas se obtiene $F \wedge C' < G'$, es decir, $F < \neg C' \vee G'$, o sea, $F < G$.

Si $F \wedge \wedge_x C(x) < G$ es la conclusión de otra regla, se procederá exactamente de la misma manera. Unicamente hay que habérselas con una particularidad en el caso de la regla (6.18) si la premisa es $F \wedge \wedge_x C(x) \wedge C(t) < G$. De $F < \wedge_x C(x) \vee G$ se obtiene por atenuación $F \wedge C(t) < \wedge_x C(x) \vee G$. La hipótesis de inducción da, pues, $F \wedge C(t) < G$. Por otra parte, de $F < \wedge_x C(x) \vee G$ se sigue por inversión $F < C(y) \vee G$ y, acto seguido, también $F < C(t) \vee G$; obsérvese que en F y G no figura y libre. La hipótesis de inducción a partir de la inducción por fórmulas da ahora $F < G$.

Como las fórmulas $\vee_x C(x)$ han de ser tratadas de manera dual, queda completamente demostrada (7.12).

Juntamente con la derivabilidad de los axiomas de Peano en el semiformalismo hemos probado, pues, la ω-consistencia y, sobre todo, la consistencia simple del formalismo de Peano.

Una simple consideración retrospectiva bastará, sin duda, para asegurarnos de que la prueba de consistencia llevada a cabo no es, en lo esencial, prueba alguna de la consistencia de la aritmética, sino más bien de la lógica clásica de cuantificadores. Introdujimos este cálculo lógico trasladando la simetría (dualidad de $\wedge$ y $\vee$) existente en la lógica clásica de yuntores a la lógica constructiva de cuantificadores. Para la aplicación del cálculo lógico a un sistema axiomático añadíamos, además, la transitividad de $<$. Con el fin de no romper el curso del razonamiento no nos hemos dedicado a la gran simplificación del cálculo lógico que puede procurar el uso de la transitividad.

Vamos a entrar ahora brevemente en este punto. Resulta, en efecto, más cómodo para la prueba de la consistencia escribir las implicaciones $F < G$ con la fórmula conjuntiva F y la adjuntiva G, para las que se permiten de suyo las asociaciones y los cambios en su sucesión serial; todo lo cual, sin embargo, resulta por completo superfluo para un cálculo lógico.

Para la derivación de todas las implicaciones lógicamente válidas en un sentido clásico bastan los siguientes axiomas:

(7.13) $\bigwedge < A$

(7.14) $A < A$

(7.15) $A < \bigvee$

y las siguientes reglas —de las cuales sólo (7.19) no es efectivamente válida—:

(7.16) $A < B,, B < C \quad \Rightarrow \quad A < C$

(7.17) $C < A,, C < B \quad \Leftrightarrow \quad C < A \wedge B$

(7.18) $A < C,, B < C \quad \Leftrightarrow \quad A \vee B < C$

(7.19) $A \wedge B < C \quad \Rightarrow \quad A < \neg B \vee C$

(7.20) $A < B \vee C \quad \Rightarrow \quad A \wedge \neg B < C$

(7.21) $A < B(y) \quad \Leftrightarrow \quad A < \bigwedge_x B(x)$

(7.22) $A(y) < B \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee_x A(x) < B$

Por medio de $\Leftrightarrow$ expresamos que las reglas también pueden ser leídas en sentido inverso. Si —al igual que en (7.17) y (7.18)— figuran a la izquierda dos implicaciones (separadas por ,,), se entenderá por ello la inversión de dos reglas.

En las reglas (7.21) y (7.22) para los cuantificadores, han de respetarse nuevamente las condiciones respecto de las variables: x ha de ser libre para y, y en el sentido $\Rightarrow$ y no deberá figurar libre a la derecha.

La equivalencia del nuevo cálculo (7.13)-(7.22) con el cálculo de cuantificadores (6.10)-(6.21) —siendo restringidos en aquél los términos t a las variables— es trivial. A excepción de la reflexividad para fórmulas que se quiera, las nuevas reglas no son

sino casos especiales de las reglas anteriores y de sus inversiones. Las reglas precedentes se derivan, recíprocamente, de (7.13)-(7.22) por atenuación, y ésta resulta admisible para el nuevo cálculo como puede verse acto seguido: de $A \wedge A' < A \wedge A'$ se sigue por (7.17) $A \wedge A' < A$. De ahí que de $A < B$ pueda pasarse a $A \wedge A' < B$ por (7.16). De igual modo puede obtenerse $A < B \vee B'$.

Si se deja ahora la lógica pura y se dirige la atención a una teoría particular, a la aritmética, por ejemplo, se ve como, por lo general, junto a las variables figuran términos s, t ... construidos a partir de términos primitivos.

En lugar de tomar nota de estos términos reformulando (7.21) y (7.22), puede utilizarse una regla de sustitución para las implicaciones $I(x)$ con una variable libre:

(7.23) $I(x) \Rightarrow I(t)$

Si se trata de una teoría especial de la matemática constructiva se darán, además, unas instrucciones para la construcción, que den lugar a todos los objetos de la teoría —en tanto, naturalmente, que simples símbolos—. Con una variable n para estas constantes de la teoría (en aritmética eran las cifras 0, 0′, 0″, ...) tendrá que añadirse todavía la regla de inducción infinita:

(7.24) $\overline{\bigwedge}_x I(n) \Rightarrow I(x)$

Bastará ya sólo con añadir a la teoría, en lugar de (6.22) las implicaciones básicas

(7.25) $a < b$

para las proposiciones atómicas a, b, ...

Nuestra prueba de consistencia nos ha proporcionado asimismo la consistencia de este nuevo semiformalismo (7.13)-(7.25). ¿Qué hemos utilizado con este propósito de las implicaciones básicas (7.25)? Si se repasa otra vez la prueba entera podrá observarse que la división de las proposiciones atómicas en «verdaderas» y «falsas» no es utilizada sino para demostrar que la reflexividad

(7.26) $c < c$

o bien la transitividad

(7.27) $a < c,, c < b \Rightarrow a < b$

son derivables o admisibles para las proposiciones atómicas a, b y c. Juntamente con la definición de que $a < b$ «vale» si a es falsa o b verdadera, esto proporciona de hecho la división de las proposiciones atómicas. (7.26) vale, ciertamente, si c es verdadero o falso. Y dado que c no es ambas cosas a la vez, verdadero y falso, para la validez de las premisas de (7.27) a habrá de ser verdadero o b falso, esto es, habrá de valer $a < b$.

Para la prueba de la consistencia del semiformalismo aritmético con la transitividad, de toda la aritmética sólo se utiliza (7.26) y (7.27). La situación cambia, evidentemente, si se quieren introducir los axiomas de Peano (6.1)-(6.9) en la prueba misma de la consistencia. En este caso no hay otro remedio que utilizar una parte mayor de la aritmética; se tendrá que demostrar, en efecto, la derivabilidad de los axiomas de Peano en el semiformalismo. Estas «pruebas» se llevaron ya, no obstante, a cabo en el § 5. Pertenecen a la matemática constructiva y en el caso de los axiomas de Peano son triviales, dado que —como hemos visto— éstos no son, en lo esencial, otra cosa que las definiciones inductivas de las relaciones básicas $=$, $\neq$ y las funciones básicas $+$ y $\cdot$. El axioma de inducción juega asimismo un papel importante. La derivación, tal y como la hemos dado en el curso de la prueba de la consistencia, sólo se distingue de la prueba constructiva del § 5 en que la primera subjunción $\rightarrow$ tuvo que ser sustituida en (5.10) por $\neg \ldots \vee \ldots$ En lo esencial la cosa quedó, sin embargo, en que el axioma de inducción debía ser probado aplicando una inducción al metanivel. Sin que ello implique ningún regreso infinito, ya que la fundamentación operativa de la inducción es independiente del nivel lingüístico de la fórmula $A(x)$.

Si no se tratase de la aritmética, sino de otra teoría cuyos objetos fueran producidos por construcción simbólica y cuyos conceptos básicos fueran definidos inductivamente, para su axiomatización bastaría igualmente con tomar las propias definiciones inductivas en conexión con un axioma de inducción. Las proposiciones atómicas son, en todo caso, d-definidas por medio de

las definiciones inductivas de los conceptos básicos. En la aritmética, los conceptos fundamentales eran incluso v-definidos. Lo cual posibilitaba la definición de la validez de las implicaciones básicas $a < b$ para las proposiciones atómicas, por medio de «a falsa o b verdadera». Pero esta definición clásica de la implicación no es indispensable. Para las proposiciones atómicas d-definidas a y b, basta con determinar que $a < b$ «valdra» cuando en un diálogo en el que el oponente afirme a y el proponente b, gane siempre el proponente. También para esta validez efectiva de las implicaciones «vale», evidentemente, la reflexividad (7.26). Como admisibilidad de la transitividad (7.27) hay que entender ahora que $a < b$ es válida «si» $a < c$ y $c < b$ son válidas. Se trata, desde luego, de una afirmación metalingüística, pero es una afirmación trivial. Porque, de acuerdo con una interpretación operativa, el oponente O ha de afirmar primero $a < c$ y $c < b$ y el proponente P ha de afirmar $a < b$, es decir, ha de defender b si a es afirmada por O. Si P afirma ahora a, por parte de O habrá de ser afirmada c, en virtud de $a < c$, y si P afirma entonces a, todavía O habrá de afirmar c en virtud de $c < b$. P podrá asumir entonces b. Este razonamiento es idéntico al que a través de una adecuada estrategia de ganancia conduciría a la siguiente situación dialógica:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow C \\ C \rightarrow B \end{array} \;\Big\|\; A \rightarrow B$$

o sea, como la que demuestra la validez lógico-efectiva de la implicación:

$$A \rightarrow C \,\dot{\wedge}\, C \rightarrow B < A \rightarrow B$$

Nuestra prueba de la consistencia procura, para la adición al semiformalismo (7.13)-(7.24) de las implicaciones básicas $a < b$ así definidas, el siguiente resultado: todas las implicaciones derivables son también derivables si se atenúa la implicación básica $a < b$ a

$$F \wedge a < b \vee G$$

y como reglas se utilizan sólo (6.13)-6.20) y la inducción infinita. Sacábamos de ello la consecuencia de que $\vee < \wedge$ no es derivable a partir de (7.13)-(7.24). De manera más general podemos decir que —en virtud de (7.13)-(7.24)— de entre todas las implicaciones de las que se partía como implicaciones básicas, son derivables las implicaciones $a < b$ entre proposiciones atómicas. La lógica clásica entera, incluida la inducción, no procura ninguna implicación nueva entre proposiciones atómicas. Este es el sentido de la consistencia que hemos probado.

En lo que concierne específicamente a la aritmética, este resultado general significa que respecto de la consistencia no hay necesidad de limitarse a las proposiciones atómicas v-definidas, como nuestras ecuaciones construidas con ayuda de la adición y de la multiplicación. Pueden ser añadidos discrecionalmente nuevos conceptos fundamentales, pero, como es obvio, éstos habrán de ser d-definidos, porque de lo contrario las afirmaciones $a < b$ perderían su sentido.

III

ARITMETIZACION DE LOS FORMALISMOS

§ 8. Formalismos completos

Vamos a abordar el problema de la incompletitud de la aritmética formalizada partiendo de una pregunta que —tanto si su respuesta conduce al objetivo deseado como si no— ofrece no poco interés específico: ¿Cómo definir matemáticamente la diferencia existente entre un «formalismo completo» y un «semiformalismo»? No basta con decir simplemente que una formalización completa ha de ser un sistema finito de reglas «finitas». Ni siquiera aduciendo que una regla «finita» ha de tener la forma

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \Rightarrow \mathfrak{A}$$

queda solucionado el problema del aspecto que puedan tener las fórmulas $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}$. ¿Es el sistema de Peano un sistema finito de reglas, a pesar de que el axioma de inducción proporciona un nuevo axioma para toda fórmula $A(x)$? ¿O no será acaso la inducción infinita una regla finita dado que en la forma

$$\bar{\wedge}_n I(n) \Rightarrow I(x)$$

no tiene más que una premisa?

Como antes de dar una respuesta a estas preguntas hay que definir adecuadamente el concepto de «formalismo completo», no es posible responder a las mismas sin cierta arbitrariedad. Se trata, en suma, de elegir una definición. Lo cual no deja de ser, desde luego, una arbitrariedad en el plano teórico, pero en la práctica todos los lógicos están de acuerdo acerca de lo que hay que entender —significativamente— como formalización completa. ¿Con qué objetivo se ha acometido el esfuerzo de llevar a cabo tal formalización completa? Respuesta: reducir la prueba

de los enunciados matemáticos a operaciones esquemáticas regidas por unas determinadas reglas, de tal modo que una «prueba» no sea sino una sucesión finita de figuras en la que no haya figura cuya derivación de las figuras anteriores de acuerdo con una de las reglas dadas no pueda ser —sobre la exclusiva base de su composición simbólica— perfectamente controlada.

De acuerdo con esta respuesta las reglas habrán de tener, pues, un número finito de premisas, es decir, su forma será:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \Rightarrow \mathfrak{A}$$

representando $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}$ figuras compuestas con la ayuda de ciertos símbolos atómicos (en número finito). Comencemos por examinar las fórmulas de la aritmética del capítulo II desde el punto de vista de los símbolos atómicos utilizados. Encontramos la cifra 0, los signos de funciones $'$, $+$, $\times$ (en favor de la claridad escribimos $\times$ en lugar de $\cdot$), el signo de relación $=$, las partículas lógicas $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\bigwedge$, $\bigvee$, las constantes lógicas $\bigvee$, $\bigwedge$ y, por último, las variables x, y, ...

En cuanto a las variables, aún no hemos determinado cómo deben ser construidas a partir de símbolos atómicos. Vamos a subsanar esto tomando la letra ξ, por ejemplo, como variable y formando otras variables a base de anteponer un $*$, o sea: ξ, $*\xi$, $**\xi$, ...

En total tenemos, pues, los siguientes 14 símbolos atómicos:

$$0' + \times = \wedge \vee \neg \bigwedge \bigvee \bigvee \bigwedge \xi *$$

No hemos incluido en esta lista los paréntesis (,), utilizados hasta este momento, dado que —en virtud de un procedimiento debido a ŁUKASIEWICZ— cabe prescindir fácilmente de todos los paréntesis y de todos los puntos que sirven para evitarlos. En efecto, si no se escriben los signos de las funciones —más brevemente llamados «functores»— en parte delante, en parte detrás y en parte entre sus argumentos, sino exclusivamente delante, todos los paréntesis resultan superfluos. Ejemplo: para $((x + y) \cdot z)'$ teníamos que escribir antes:

$$((\xi + *\xi) \times **\xi)'$$

En lugar de lo cual escribiremos ahora:

$$' \times + \xi *\xi **\xi$$

Hay que reconocer que es preciso habituarse a esto. Poner delante $'$ no crea, evidentemente, la menor dificultad; menos habitual resulta, desde luego, que los functores diádicos $+$ y $\times$ no vayan entre los argumentos. Para no entrar en conflicto con los hábitos usuales de lectura reemplazaremos en lo que sigue los functores diádicos $+$, $\times$, así como $=$, $\wedge$, $\vee$, con los que también hemos de contar a este respecto, por los siguientes símbolos atómicos:

$$\Gamma_+, \Gamma_\times, \Gamma_=, \Gamma_\wedge, \Gamma_\vee$$

Así, pues, nuestro ejemplo se escribirá:

$$\Gamma_\times \Gamma_+ \xi *\xi **\xi$$

Figurando en él $\Gamma_+ \xi *\xi$ para $(\xi + *\xi)$ y $\Gamma_\times \Gamma_+ \xi *\xi **\xi$ para $((\xi + *\xi) \times **\xi)$.

He aquí, pues, nuestra lista definitiva de símbolos atómicos —ligeramente cambiado su orden—:

$$0, \xi, \bigvee, \bigwedge, ', *, \neg, \Gamma_+, \Gamma_\times, \Gamma_=, \Gamma_\wedge, \Gamma_\vee, \wedge, \vee$$

Damos a esta lista el nombre de «alfabeto» de nuestras formalizaciones. Consta de las cuatro constantes 0, ξ, $\bigvee$, $\bigwedge$, de los tres functores monádicos $'$, $*$, $\neg$ y de los siete functores diádicos

$$\Gamma_+, \Gamma_\times, \Gamma_=, \Gamma_\wedge, \Gamma_\vee, \wedge, \vee$$

Los cuantificadores, escritos por nosotros siempre en la forma $\bigvee_x$ o $\bigwedge_x$, con una variable x como índice, se presentan ahora como functores diádicos. El primer argumento es una variable x, el segundo una fórmula $A(x)$. P. ej., la fórmula

$$\bigwedge_x \bigwedge_y ((x + y) = (y + x))$$

deberá ser escrita ahora «oficialmente»:

$$\wedge\, \xi\, \wedge\, {}^{*}\xi\, \Gamma_{=}\, \Gamma_{+}\, \xi\, {}^{*}\xi\, \Gamma_{+}\, {}^{*}\xi\, \xi.$$

En nuestras formalizaciones únicamente figuran composiciones de las letras (símbolos atómicos) de este alfabeto. Pero no figuran todas las composiciones, sino sólo aquellas que tienen sentido. Como condición mínima para «tener sentido» ponemos la de que de todo functor se deriven tantas composiciones con sentido como lugares de argumento tenga el functor en cuestión. Partimos, pues, de las constantes 0, ξ, $\vee$, $\wedge$ y formamos nuevas figuras poniendo delante de una figura ya formada un functor monádico, o un functor diádico delante de dos figuras ya formadas. Las figuras de este modo compuestas con el citado alfabeto pueden recibir el nombre de «palabras».

Como variables para las palabras utilizamos p, q, ... Las palabras son, pues, figuras que deben ser construidas de acuerdo con las siguientes reglas:

(1) 0, ξ, $\vee$, $\wedge$

(2) $'p$, $^{*}p$, $\neg p$ para toda palabra p

(3) $\Gamma_{+}\, pq$, $\Gamma_{\times}\, pq$, $\Gamma_{=}\, pq$, $\Gamma_{\wedge}\, pq$, $\Gamma_{\vee}\, pq$, $\wedge\, pq$, $\vee\, pq$ para todo par de palabras p, q

Como es obvio, de esto se desprende el sin sentido de muchas otras palabras; es el caso, por ejemplo, de $\neg\, \Gamma_{+}\, \xi\, 0$; no obstante, de este modo queda ya efectuada una primera selección de palabras. Y, en todo caso, todas las fórmulas que definiremos como implicaciones con la ayuda de nuestras formalizaciones serán palabras de este tipo.

Examinemos ahora con más detenimiento una formalización completa de la aritmética del tipo (6.1)-(6.9), (7.13)-(7.23) atendiendo a la formación de sus reglas. Reglas que en modo alguno constan de palabras. Las reglas contienen, junto a las letras del alfabeto variables, sobre todo, es decir: x, y, ..., s, t, ... y A, B, ... Como vamos a convertir estas reglas en el objeto de nuestra investigación, introducimos nuevas variables u, v, ... como variables-objeto para las palabras. Corresponden a las x, y, ... de la aritmética. Queremos mostrar que basta con este único tipo de variables (para las palabras). No necesitamos variables para variables numéricas, términos ni fórmulas. Para conseguirlo hay que añadir las definiciones inductivas de estas clases de palabras (en lógica suele decirse «clase» en lugar de «conjunto») a nuestro sistema de reglas. Con las palabras se forman, pues, «proposiciones» del tipo:

p es una variable numérica
p es un término
p es una fórmula.

Como hemos utilizado las variables x, t y A para las clases, abreviamos así estas proposiciones:

$P_x\ p$
$P_t\ p$
$P_A\ p$

P_x, P_t, P_A quedan introducidos así como nuevos símbolos atómicos. Ahora estamos ya en condiciones de dar las 15 reglas siguientes para las definiciones inductivas:

(8.1)
$$\begin{cases} P_x\ \xi \\ P_x\ u \Rightarrow P_x\ {}^{*}u \end{cases}$$

(8.2)
$$\begin{cases} P_t\ 0 \\ P_x\ u \Rightarrow P_t\ u \\ P_t\ u \Rightarrow P_t{}'\ u \\ P_t\ u\ ,,\ P_t\ v \Rightarrow P_t\ \Gamma_{+}\ u\ v \\ P_t\ u\ ,,\ P_t\ v \Rightarrow P_t\ \Gamma_{\times}\ u\ v \end{cases}$$

$$(8.3)\quad \begin{cases} P_A\ \vee \\ P_A\ \wedge \\ P_t\ u \,,,\, P_t\ v \Rightarrow P_A\ \Gamma_=\ u\ v \\ P_A\ u \,,,\, P_A\ v \Rightarrow P_A\ \Gamma_\wedge\ u\ v \\ P_A\ u \,,,\, P_A\ v \Rightarrow P_A\ \Gamma_\vee\ u\ v \\ P_A\ u \Rightarrow P_A\ \neg\ u \\ P_x\ u \,,,\, P_A\ v \Rightarrow P_A\ \wedge\ u\ v \\ P_x\ u \,,,\, P_A\ v \Rightarrow P_A\ \vee\ u\ v \end{cases}$$

p es una variable numérica si y sólo si para una palabra p, $P_x\ p$ es derivable de acuerdo con estas reglas. p es un término si y sólo si $P_t\ p$ es derivable y p es una fórmula si y sólo si $P_A p$ es derivable.

Ahora podemos comprobar lo siguiente: hemos partido de un «alfabeto» y hemos compuesto con su ayuda ciertas figuras, llamadas «palabras». En las reglas anteriores no encontramos estas palabras, sino «fórmulas» que constan de un «relator» P_x, P_t, P_A seguido de un «término». Los «términos» se distinguen de las palabras por contener, además de las letras del alfabeto, variables de palabras: u, v... Por lo demás, los nuevos términos, a los que llamamos «términos-palabra» han de ser construidos siguiendo las mismas instrucciones que las palabras; lo cual quiere decir que:

1) las constantes 0, ξ, $\vee$, $\wedge$ son términos-palabra
2) las variables de palabras u, v, ... son términos-palabra
3) si $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{t}$ son términos-palabra, entonces también lo son

$$\mathfrak{s}$$
$$* \ \mathfrak{s}$$
$$\neg\ \mathfrak{s}$$
$$\Gamma_+\ \mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$$
$$\Gamma_\times\ \mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$$
$$\Gamma_=\ \mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$$

$$\Gamma_\wedge\ \mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$$
$$\Gamma_\vee\ \mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$$
$$\wedge\ \mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$$
$$\vee\ \mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$$

Para las «fórmulas» que forman las premisas y conclusiones de nuestras reglas utilizamos las variables $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, ... Tienen la forma $P\ \mathfrak{s}$ con uno de los relatores monádicos (también llamados predicados) P_x, P_t, P_A. Ya las reglas anteriores dan a entender que también las restantes reglas de la formalización completa habrán de ser de la forma

$$\mathfrak{U}_1 \,,,\, \mathfrak{U}_2 \,,,\, \ldots \,,,\, \mathfrak{U}_m \Rightarrow \mathfrak{U}$$

donde cada uno de los $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_m, \mathfrak{U}$ es una fórmula $P\ \mathfrak{s}_1 \ldots\ \mathfrak{s}_n$ con un relator P de n-lugares y n términos-palabra subsiguientes. Examinando los axiomas y reglas del cálculo lógico (7.13)-(7.23), de acuerdo con esta hipótesis parece, en principio, que cabrá proceder sin dificultades. Utilizamos un relator diádico $P <$, escribimos, en consecuencia, $P < u\ v$ en lugar de $u < v$, y obtenemos las siguientes 12 reglas:

$$(8.4)\quad \begin{cases} P_A\ u \Rightarrow P <\ \wedge\ u \\ P_A\ u \Rightarrow P <\ u\ u \\ P_A\ u \Rightarrow P <\ u\ \vee \\ P <\ u\ v \,,,\, P <\ u\ w \Rightarrow P <\ u\ w \\ P <\ w\ v \,,,\, P <\ w\ v \Rightarrow P <\ w\ \Gamma_\wedge\ u\ v \\ P <\ w\ \Gamma_\wedge\ u\ v \Rightarrow P <\ w\ u \\ P <\ w\ \Gamma_\wedge\ u\ v \Rightarrow P <\ w\ v \\ P <\ u\ w \,,,\, P <\ v\ w \Rightarrow P\ \Gamma_\vee\ u\ v\ w \\ P <\ \Gamma_\vee\ u\ v\ w \Rightarrow P <\ u\ w \\ P <\ \Gamma_\vee\ u\ v\ w \Rightarrow P <\ u\ w \\ P <\ \Gamma_\vee\ u\ v\ w \Rightarrow P <\ u\ \Gamma_\vee\ \neg\ v\ w \\ P <\ u\ \Gamma_\vee\ v\ w \Rightarrow P <\ \Gamma_\wedge\ u \neg\ v\ w \end{cases}$$

En las reglas de los cuantificadores (7.21), (7.22), que todavía faltan, se presenta una dificultad. Utilizaremos en ellas un simbolismo para la designación de la sustitución. Por otra parte, las reglas de los cuantificadores conllevan una condición en lo tocante a las variables que hasta ahora sólo ha sido formulada en el lenguaje natural: y, por ejemplo, «no ha de figurar libre» en A, y x ha de ser «libre» para y. Asimilar las reglas donde se presentan estas condiciones a la forma de las reglas anteriores no resulta excesivamente difícil. Sólo se precisa un poco de paciencia. Para la sustitución hará falta un relator de cuatro lugares

$$\Sigma\, xtAB$$

que ha de significar que la sustitución de x por t en A da lugar a la fórmula B, en el simbolismo usual:

$$\overset{x}{/_t}\, A \equiv B$$

$N\,xA$ significa: x no figura libre en A.

$\Phi\, xtA$ significa: x es libre para t en A.

Se trata ahora de definir inductivamente estas relaciones Σ, N, Φ. Antes de dar su forma codificada vamos a formular las definiciones en el simbolismo usual. Comencemos con $N\,xA$. La fórmula A se compone de fórmulas atómicas tipo $s = t$. De ahí que debamos definir primero $N\,xt$. Pero como t está compuesta de variables numéricas, primero tendrá que ser definida $N\,xy$. El que la variable x no figure libre en y quiere decir simplemente que x no es igual a y.

De manera similar a lo que decimos con la definición inductiva de la desigualdad para las cifras 0, 0′, 0″, ... hemos de poner aquí para las variables ξ, $*\xi$, $**\xi$, ...:

$$N\,\xi\,{*x}$$
$$N\,{*x}\,\xi$$
$$N\,x\,y \Rightarrow N\,{*x}\,{*y}$$

Para la codificación hemos de sustituir el uso de las variables x e y por la condición $P_x\,u$ y $P_x\,v$ para las palabras. Obtenemos así:

$$(8.5)\qquad \begin{cases} P_x\,u \Rightarrow N\,\xi\,{*u} \\ P_x\,u \Rightarrow N\,{*u}\,\xi \\ P_x\,u \,,,\, P_x\,v \,,,\, Nuv \Rightarrow N\,{*u}\,{*v} \end{cases}$$

Ahora podemos proseguir —asimismo en forma codificada—:

$$(8.6)\qquad \begin{cases} P_x\,u \Rightarrow N\,u\,0' \\ N\,u\,v \Rightarrow N\,u'v \\ N\,u\,v \,,,\, N\,u\,w \Rightarrow N\,u\,\Gamma_+\,v\,w \\ N\,u\,v \,,,\, N\,u\,w \Rightarrow N\,u\,\Gamma_\times\,v\,w \\ N\,u\,v \,,,\, N\,u\,w \Rightarrow N\,u\,\Gamma_=\,v\,w \\ P_x\,u \Rightarrow N\,u\,\vee \\ P_x\,u \Rightarrow N\,u\,\wedge \\ N\,u\,v \,,,\, N\,u\,w \Rightarrow N\,u\,\Gamma_\wedge\,v\,w \\ N\,u\,v \,,,\, N\,u\,w \Rightarrow N\,u\,\Gamma_\vee\,v\,w \\ N\,u\,v \Rightarrow N\,u\,{-_\neg}\,v \\ P_x\,u \,,,\, P_A\,v \Rightarrow N\,u\,\wedge\,u\,v \\ P_x\,u \,,,\, P_A\,v \Rightarrow N\,u\,\vee\,u\,v \end{cases}$$

Las dos últimas reglas expresan que una variable x no figura libre en una fórmula que empieza por $\wedge_x$ o $\vee_x$.

De este modo queda inductivamente definido el «no-figurar-libre-en». Pasamos ahora a la definición de $\Phi\, xt\, A$, es decir, «x es libre para t en A». Si A es una fórmula que no contiene ningún cuantificador, si es una fórmula atómica, sobre todo, entonces x es libre siempre para t en A. No exigimos para ello

que x figure verdaderamente libre en A. Tenemos, en consecuencia, las reglas siguientes:

$$(8.7)\quad \begin{cases} P_x\ u \,,,\, P_t\ v \Rightarrow \Phi\ u\ v\ \vee \\ P_x\ u \,,,\, P_t\ v \Rightarrow \Phi\ u\ v\ \wedge \\ P_x\ u \,,,\, P_t\ v \,,,\, P_t\ w_1 \,,,\, P_t\ w_2 \Rightarrow \Phi\ u\ v\ \Gamma_=\ w_1\ w_2 \\ \Phi\ u\ v\ w_1 \,,,\, \Phi\ u\ v\ w_2 \Rightarrow \Phi\ u\ v\ \Gamma_\wedge\ w_1\ w_2 \\ \Phi\ u\ v\ w_1 \,,\, \Phi\ u\ v\ w_2 \Rightarrow \breve{\Phi}\ u\ v\ \Gamma\ \vee\ w_1\ w_2 \\ \Phi\ u\ v\ w \Rightarrow \Phi\ u\ v \neg\ w \\ \Phi\ u\ v_1\ w \,,,\, N\ v_2\ v_1 \Rightarrow \Phi\ u\ v_1\ \wedge\ v_2\ w \\ \Phi\ u\ v_1\ w \,,,\, N\ v_2\ v_1 \Rightarrow \Phi\ u\ v_1\ \vee\ v_2\ w \end{cases}$$

Las dos últimas reglas expresan que u es libre para v_1 en $\wedge v_2 w$ y, respectivamente, en $\vee v_2 w$ si u es libre para v_1 en w y v_2 no figura libre en v_1.

Por último tenemos que definir inductivamente las proposiciones de sustitución $\Sigma xtAB$: «la sustitución de x por t en A da B». Puesto que A está compuesta de fórmulas atómicas y, en consecuencia, de términos, comenzamos —sirviéndonos, en principio, del simbolismo usual— por

$$^x/_t\ x \equiv t$$
$$N\ xt_2 \Rightarrow\ ^x/_{t_1}\ t_2 \equiv t_2$$

Lo que enforma codificada es:

$$(8.8)\quad \begin{cases} P_x\ u_1 \,,,\, P_t\ u_2 \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ u_1\ u_2 \\ P_t\ u_2 \,,,\, N\ u_1\ v \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ v\ v \end{cases}$$

Acto seguido se define para términos y fórmulas compuestos que si se sustituye en una composición hay que comenzar por sustituir en las partes. Así nos resta, pues, por definir:

$$(8.9)\quad \begin{cases} \Sigma\ u_1\ u_2\ v_1\ v_2 \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ '\ v_1\ '\ v_2 \\ \Sigma\ u_1\ u_2\ v_1\ v_2 \,,,\, \Sigma\ u_1\ u_2\ w_1\ w_2 \Rightarrow u_1\ u_2\ \Gamma_+\ v_1\ w_1\ \Gamma_+\ v_2\ w_2 \\ \qquad » \qquad » \qquad \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ \Gamma_\times\ v_1\ w_1\ \Gamma_\times\ v_2\ w_2 \\ \qquad » \qquad » \qquad \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ \Gamma_=\ v_1\ w_1\ \Gamma_=\ v_2\ w_2 \\ \qquad » \qquad » \qquad \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ \Gamma_\wedge\ v_1\ w_1\ \Gamma_\wedge\ v_2\ w_2 \\ \qquad » \qquad » \qquad \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ \Gamma_\vee\ v_1\ w_1\ \Gamma_\vee\ v_2\ w_2 \\ \Sigma\ u_1\ u_2\ v_1\ v_2 \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2 \neg\ v_1 \neg\ v_2 \\ N\ u_1\ u_3 \,,,\, \Sigma\ u_1\ u_2\ v_1\ v_2 \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ \wedge\ u_3\ v_1\ \wedge v_3\ v_2 \\ N\ u_1\ u_3 \,,,\, \Sigma\ u_1\ u_2\ v_1\ v_2 \Rightarrow \Sigma\ u_1\ u_2\ \vee\ u_3\ v_1\ \vee\ u_3\ v_2 \end{cases}$$

La segunda regla de (8.8) contiene ya los casos

$$^x/_t\ \wedge_x A \equiv \wedge_x A$$
$$^x/_t\ \vee_x A \equiv \vee_x A$$

dado que $N\ x\ \wedge_x A$ y $N\ x\ \vee_x A$ son válidos.

Apoyándonos en este trabajo preparatorio podemos dar las reglas de los cuantificadores (7.21) y (7.22) de forma codificada:

$$(8.10)\quad \begin{cases} \Sigma\ u_1\ u_2\ w_1\ w_2 \,,,\, \Phi\ u_1\ u_2\ w_1 \,,,\, Nu_2\ V \,,,\, Nu_2\ w_1 \,,,\, P{<}v\ w_2 \\ \qquad \Rightarrow p < v \wedge u_1 \cdot w_1 \\ \Sigma\ u_1\ u_2\ w_1\ w_2 \,,,\, \Phi\ u_1\ u_2\ w_1 \,,,\, P{<}\wedge u_1\ w_1 \Rightarrow P < v\ w_2 \\ \Sigma\ u_1\ u_2\ v_1\ v_2 \,,,\, \Phi\ u_1\ u_2\ v_1 \,,,\, N\ u_2\ v_1 \,,,\, Nu_2\ w \,,,\, P{<}v_2\ w \\ \qquad \Rightarrow P < \vee\ u_1\ v_1\ w \\ \Sigma\ u_1\ u_2\ v_1\ v_2 \,,,\, \Phi\ u_1\ u_2\ v_1 \,,,\, P < \vee\ u_1\ v_1\ w \Rightarrow P < v_2\ w \end{cases}$$

La regla de sustitución (7.23) habrá de ser formulada como sigue:

$$(8.11)\quad \Sigma\ u_1\ u_2\ v_1\ v_2 \,,,\, \Sigma\ u_1\ u_2\ w_1\ w_2 \,,,\, P < v_1\ w_1 \Rightarrow P < v_2\ w_2$$

Para la formalización completa de la aritmética únicamente nos restan ya los axiomas de Peano (6.1)-(6.9). En (6.2) y (6.9) aparecen variables de fórmulas y sustituciones. Pero éstas no

ofrecen mayor dificultad. De ahí que podamos escribir en seguida las reglas codificadas:

$$
(8.12)\quad \begin{cases}
P_x u \Rightarrow P < \vee\ \Gamma_= u\, u \\
P_x u_1 ,, P_x u_2 ,, P_A v_1 ,, \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2 \Rightarrow P < \Gamma_\wedge \Gamma_= u_1 \\
\quad u_2 v_1 v_2 \\
P_x u ,, P_x v \Rightarrow P < \Gamma_= {}' u' v \Gamma_= u\, v \\
P_x u \Rightarrow P < \Gamma_= {}' u\ 0\ \wedge \\
P_x u \Rightarrow P < \vee\ \Gamma_= \Gamma_+ u\, 0\, u \\
P_x u ,, P_x v \Rightarrow P < \vee\ \Gamma_= \Gamma_+ u'\, v'\, \Gamma_+ u\, v \\
P_x u \Rightarrow P < \vee\ \Gamma_= \Gamma_\times 0\, u\, 0 \\
P_x u ,, P_x v \Rightarrow P < \vee\ \Gamma_= \Gamma_\times' u\, v\, \Gamma_+ \Gamma_\times u\, v\, v \\
P_x u_1 ,, P_t u_2 ,, P_A v_1 ,, \Sigma u_1 u_2 v_1 v_2 ,, \Phi u_1 u_2 v_1 ,, \\
\quad \Sigma u_1\, 0\, v_1\, v_0 ,, \\
\Sigma u_1' u_1 v_1 v \Rightarrow P < \Gamma_\wedge v_0 \wedge u_1\ \Gamma_\wedge \neg v_1\, v\, v_2
\end{cases}
$$

Estas 75 reglas (8.1)-(8.12) constituyen una formalización completa en forma codificada. Hay 15 reglas para las variables, términos y fórmulas, es decir, para P_x, P_t, P_A, y 34 reglas para las relaciones auxiliares N, Φ, Σ. En cuanto a reglas para la derivación de las implicaciones hay, como hasta ahora, 26, es decir: 9 axiomas de Peano, 3 axiomas lógicos y 14 reglas lógicas.

Vamos a recapitular las propiedades características de una formalización completa codificada.

(1) A partir de un alfabeto finito, compuesto por constantes y functores monádicos, diádicos... y de las variables de palabras, se forman términos.

(2) A partir de los términos se forman fórmulas con la ayuda de relatores monádicos, diádicos, etc.

(3) A partir de las fórmulas se forma un número finito de reglas:

$$\mathfrak{U}_1 ,, \mathfrak{U}_2 ,, \dots ,, \mathfrak{U}_n \Rightarrow \mathfrak{U}$$

Por lo menos una de las reglas no contiene premisas (es decir, $n = 0$, estas reglas reciben también el nombre de axiomas).

(4) En cada una de las reglas (3) aparecen todas las variables de palabras que figuran en la conclusión $\mathfrak{U}$, por lo menos en una de las premisas $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_n$. (De ahí que los axiomas carezcan de variables de palabras.)

La eliminación de la última condición (4) no crearía, como es evidente, el menor problema; pero es cómoda y, en todo caso, en nuestro ejemplo, de una formalización completa es satisfecha siempre.

Definición 8.1. Un sistema de reglas que cumple las condiciones (1)-(4) recibe el nombre de cálculo codificado.

Proponemos ahora adoptar los cálculos codificados como definición del concepto de «sistema formal completo». A favor de esta definición habla el hecho de que todas las formalizaciones manejadas hasta la fecha la satisfacen, con la precisa excepción de las «semiformalizaciones» que utilizan la inducción infinita.

Por otra parte, la inducción infinita no puede ser formulada, en virtud de su propio sentido, a la manera de una regla finita codificada. El hecho de que no pueda ser realmente sustituida por ningún cálculo codificado en el cumplimiento de su función (es decir, la derivación de proposiciones) constituye, precisamente, una de las consecuencias más importantes del teorema de incompletitud de GÖDEL.

Esperamos que la definición de sistemas formales completos que acabamos de proponer no pueda ser tachada de «demasiado amplia». En un cálculo codificado cada uno de los pasos de una derivación puede ser, en efecto, controlado con toda la exactitud deseada. Es posible incluso programar máquinas capaces de controlar las derivaciones. No es fácil imaginar, por otra parte, cómo cabría ampliar este concepto sin perder esta controlabilidad de todos y cada uno de los pasos de las derivaciones.

Pensando en que algún lector acaso no se dé por satisfecho con estas consideraciones inmanentes, añadiremos que (desde HERBRAND, 1931) son varios los investigadores que, indepen-

dientemente unos de otros, vienen dedicándose a elaborar una definición apropiada de los formalismos de la lógica moderna y de la matemática. Las conclusiones a que han ido llegando son no poco distintas entre sí, pero en realidad todas se han revelado como coincidentes con la definición arriba propuesta. Nos referimos a la *recursive enumerability* de KLEENE, 1936; al concepto equivalente —restringido a las funciones— de la calculabilidad de GÖDEL, 1934; de la definibilidad combinatoria de ROSSER, 1935; de la λ-*definability* de CHURCH, 1936, y de la *computability* de TURING y POST, 1936. La definición de cálculos codificados arriba propuesta únicamente se diferencia de los *canonical systems* de POST, 1943, por la utilización de la notación de Łukasiewicz. Parece, pues, inevitable llegar a este concepto cuantas veces se investigue en torno a una posible definición matemática de la formalización completa. En todas las investigaciones consagradas a este problema no hay quien haya llegado a una posibilidad razonable de extensión del concepto del que nos ocupamos. Incluso la teoría de algoritmos de MARKOV, 1954, se ha revelado como equivalente.

En cuanto al problema de la incompletitud del formalismo de Peano, la justificación de esta definición no tiene demasiada importancia, dado que los cálculos codificados llevan, de todos modos, a una prueba transparente de la incompletitud. Ahora bien, la justificación de este concepto —a la vista del hecho histórico de su frecuente aparición entre los años 1934 y 1954— es importante para la comprensión de los teoremas de la «indecibilidad» de los sistemas formales, especialmente de las teorías axiomáticas, tal y como ha sido probada, a partir del teorema de incompletitud gödeliano, por CHURCH, 1936; después por TARSKI, 1949, y, desde entonces, por muchos otros. Como preparación vamos a utilizar la

Definición 8.2. Dado un alfabeto α, decimos que un conjunto M de palabras de α (es decir, de palabras compuestas de letras de dicho alfabeto) es «enumerable» si hay un cálculo codificado K, sobre la base del propio alfabeto α, con relatores P_0, P_1, P_2, ..., de los cuales P_0 es monádico, tal que para toda palabra p de α, valga $p \in M$ si y sólo si $P_0\, p$ es derivable en K.

Escribiendo simplemente $\vdash \mathfrak{A}$ para indicar la derivabilidad de una fórmula $\mathfrak{A}$ en K, tendremos que valdrá:

(8.13) $\quad p \in M \longleftrightarrow \vdash P_0\, p$ para todas las palabras p

Utilizamos el largo signo $\longleftrightarrow$ para expresar la equivalencia metamatemática o la coimplicación[1] (según la interpretación). La validez ha de seguir siendo entendida, por supuesto, en el sentido de la matemática constructiva: quien sostenga (8.13) habrá de estar en disposición de defender $\vdash P_0\, p$ contra todo oponente que afirme $p \in M$ (para un p de su elección) y viceversa.

Para las relaciones poliádicas afirmamos asimismo:

Definición 8.3. De una relación n-ádica R entre palabras de α, se dice que es enumerable si para un cálculo codificado apropiado K, sobre el alfabeto α con relatores P_0, P_1, ..., de los cuales P_0 es n-ádico, vale:

(8.14) $\quad p_1, p_2, \ldots, p_n \in R \longleftrightarrow \vdash P_0\, p_1\, p_2 \ldots p$ para todos p_1, ..., p_n

Como los propios sistemas $p_1, \ldots, p_n$ de n-miembros pueden ser concebidos como palabras (con la coma como letra nueva), basta, por regla general, con limitarse a conjuntos de palabras. Con estas definiciones podremos enfrentarnos en el próximo parágrafo con el concepto de decibilidad.

§ 9. DECIBILIDAD

Sea W_a el conjunto de todas las palabras α de un alfabeto α.

Definición 9.1. Se dice que un conjunto M de palabras α es decidible si M y el conjunto complementario $W_a - M$ son conjuntos enumerables.

---

[1] Acaso convenga recordar al lector que «coimplicación» y «bicondicional» son, desde luego, términos equivalentes, si bien el segundo ocurre más usualmente en la bibliografía lógica anglosajona. *(N. del T.)*

Quien considere —por uno u otro motivo— que el término «decidible», del que aquí nos servimos, no es apropiado, dado que como tal (o como procedimiento de decisión) se representa algo diferente de la simple enumerabilidad de un conjunto y de su complemento, que escoja otra palabra. La justificación del concepto definido en (9.1) no depende únicamente del término «decidible», sino, más bien, del hecho de haber sido formado de manera muy similar al ya justificado de enumerabilidad. Si se deja completamente de lado la lógica clásica, como «decibilidad» de un conjunto (de palabras) cabrá entender, sin más, la validez de

$$\wedge_u \, . \, u \in M \vee \neg \, u \in M.$$

Toda estrategia de ganancia para esta afirmación podrá recibir también el nombre de procedimiento decisorio. La definición (9.1) precisa el concepto general de «estrategia de ganancia» de tal modo que las puebas de indecibilidad resultan asimismo posibles. Con el concepto general no cabe pensar en prueba de indecibilidad alguna. Para ningún conjunto M cabe, en efecto, aducir una estrategia de ganancia con vistas a

$$\neg \wedge_u \, . \, u \in M \vee \neg \, u \in M.$$

De hecho, esta última afirmación no es lógicamente refutable (es decir, $\neg \neg \wedge_u \, . \, u \in M \vee \neg \, u \in M.$ no es lógicamente verdadera de manera constructiva), pero un diálogo discurriría así:

$\wedge_u \, . \, u \in M \vee \neg \, u \in M.$	$\neg \wedge_u \, . \, u \in M \vee \neg \, u \in M.$
	? p
$p \in M \vee \neg \, p \in M$	?

El propio proponente P es quien debería escoger la palabra p. Para no perder si el oponente 0 adujera

$$\neg \, p \in M \;\|$$

P debería estar en condiciones de defender $p \in M$. Pero en tal caso nadie podría garantizar que el oponente no fuera asimismo capaz de ello y, en consecuencia, hubiera aducido

$$p \in M \;\|$$

La definición 9.1 puede ser literalmente extendida a las relaciones.

Mencionamos también el caso particular de la decibilidad para las funciones.

Definición 9.2. Una función n-ádica f (con palabras como argumentos y valores) recibe el nombre de «calculable» si la relación

$$(9.1) \quad \in_{u_1, \ldots, u_n, \, u} f \, u_1, \ldots, u_n = u$$

es decidible.

No deja de ser cierto, desde luego, que como procedimiento de cálculo cabría esperar otra cosa que una decisión acerca de si una palabra dada (!) es realmente el valor de f, para argumentos dados. Preferimos quedarnos, no obstante, con el término empleado en la definición 9.2. Conviene tener en cuenta que bastaría con exigir simplemente la enumerabilidad de la relación (9.1) en la definición 9.2. Para la relación complementaria valdrá, pues,

$$f \, u_1, \ldots, u_n \neq u \leftrightarrow \vee_v \, . \, f \, u_1, \ldots, u_n = v \wedge u \neq v.$$

La relación complementaria sería asimismo enumerable, ya que aplicando un cuantificador existencial, la enumerabilidad se mantendría, con lo que la relación sería decidible.

Hemos puesto todo el énfasis en el concepto de enumerabilidad, dado que éste surge casi obligatoriamente nada más plantear el problema de definir matemáticamente la plena formalización. La enumerabilidad puede ser reducida, también, a la calculabilidad de las funciones. Tenemos, en efecto (cfr. más abajo de 9.1) que:

> Todo conjunto enumerable es el campo de valores de una función calculable.

Una ventaja de esta posibilidad de representar todos los conjuntos enumerables radica en la subsistencia de la misma aun

en el caso de que sólo se admita una parte de las funciones calculables, las funciones «elementalmente calculables», por ejemplo. Según KLEENE, 1935, cabría incluso limitarse a las funciones recursivas primitivas. En una introducción a la metamatemática, no obstante, puede prescindirse de un estudio sistemático de las funciones recursivas.

Tras estas observaciones preliminares en torno al concepto de decibilidad, entramos en la prueba de la indecibilidad del formalismo de Peano, es decir, del conjunto de sus fórmulas derivables. A partir de aquí la incompletitud resulta fácilmente obtenible. Como la prueba se extenderá hasta el § 12, vamos a intentar ofrecer previamente una visión de conjunto de la misma. Parte del problema de la *representabilidad* de conjuntos de números en una aritmética formalizada $\mathfrak{E}$. Todo número está representado en el formalismo por una cifra, por ejemplo por 0, 0′, 0″,... En lo sucesivo, $\underline{m}$ designará siempre al representante de m. Consideremos ahora, por otra parte, una fórmula A del formalismo. Sea ξ una variable de $\mathfrak{E}$ y sea $A\ (\underline{m})$ la expresión que designa la fórmula que se obtiene a partir de A, cuando se sustituye en ella ξ por $\underline{m}$. La derivabilidad en $\mathfrak{E}$ se designará brevemente por $\vdash$. Para toda fórmula A podrá formarse acto seguido el conjunto de los números m, para los que vale $\vdash A\ (\underline{m})$. Los conjuntos así obtenidos reciben el nombre de conjuntos representables en $\mathfrak{E}$. Como las fórmulas de $\mathfrak{E}$ pueden ser contadas —resulta fácil numerarlas: A_0, A_1,... y de un modo tal que la correspondencia entre las fórmulas y sus números sea decidible—, los conjuntos representables en $\mathfrak{E}$ pueden recibir también un número. De acuerdo con el procedimiento de la diagonal de CANTOR se obtienen, pues, sin más, conjuntos no-representables. Designamos la no-derivabilidad (es decir, $\neg \vdash$) por $\nvdash$; $\in_m \nvdash A_m\ (\underline{m})$ será ya, pues, un conjunto no-representable. En efecto: la equivalencia $\nvdash A_m\ (\underline{m}) \longleftrightarrow \vdash A_n\ (\underline{m})$ para todo m lleva a la contradicción. $\nvdash A_n\ (\underline{n}) \longleftrightarrow \vdash A_n\ (\underline{n})$.

El peso principal de la prueba de indecidibilidad para un formalismo $\mathfrak{E}$ radica, pues, en la prueba del siguiente teorema:

Todo conjunto decidible de números es representable en $\mathfrak{E}$.

Una vez se tiene este teorema para $\mathfrak{E}$ (que únicamente será válido para ciertas formalizaciones de la aritmética y no para todas), el resto es fácil. Como $\in_m \vdash A_m\ (\underline{m})$ es enumerable (para toda fórmula A hay, en efecto, como máximo un número finito

de m tales que $A = A_m\ (\underline{m})$, y el cálculo del sistema de estos m, a partir de A, es fácilmente formalizable), el conjunto complementario $\in_m \nvdash A_m\ (\underline{m})$ no puede ser asimismo enumerable. Lo que se busca es la indecibilidad de $M = \in_m \vdash A_m$, ya que ésta significa también que el conjunto de fórmulas derivables que están en correspondencia biunívoca y decidible con los números, es indecidible. Si la numeración de las fórmulas está organizada —como es bien fácil— de tal modo que la «función diagonal» d, que hace corresponder el número de $A_m\ (\underline{m})$ como valor al número m, es calculable, M habrá de ser, de hecho, indecidible. En efecto, si M fuera decidible, el conjunto complementario de M sería enumerable, y por la equivalencia

$$\nvdash A_m\ (\underline{m}) \longleftrightarrow \bigvee_n . d\imath\, m = n \wedge n \notin M$$

también $\in_m \nvdash A_m\ (\underline{m})$ sería enumerable.

Como preparación para la prueba de la representabilidad de los conjuntos decidibles en ciertos formalismos, en el de Peano, por ejemplo, mostraremos (§ 10) que todos los conjuntos enumerables de números son aritméticamente expresables. La expresabilidad aritmética no se refiere a un formalismo, sino exclusivamente a la restricción de los medios de expresión en el formalismo de Peano.

Definición 9.3. Se dice que un conjunto M de números es aritméticamente expresable si hay una fórmula $A\ (x)$ del formalismo de Peano con una sola variable libre x, tal que valga

(9.2) $\qquad n \in M \leftrightarrow A\ (n)$ para todo n

es decir, que valga en la aritmética constructiva.

Aún no están, pues, determinados los medios con que cabe contar para la prueba de (9.2); únicamente nos son conocidos los medios de expresión: limitados a la igualdad, la adición, la multiplicación y las partículas lógicas.

Como en lo tocante a (9.2) nos movemos en el ámbito de la aritmética constructiva, la distinción entre n y $\underline{n}$ resulta superflua e incluso más bien perturbadora. De ahí que la abandonemos.

De nuevo como paso preparatorio para la prueba de la expresabilidad aritmética de los conjuntos (de números) enumerables,

mostraremos en este parágrafo qué conjuntos (de palabras) generalmente enumerables son susceptibles de expresión en una determinada forma normal. Así, pues, de entre las relaciones decidibles entresacaremos las «elementalmente decidibles», mucho más fáciles de manejar, probando que todo conjunto numerable M es expresable como sigue:

$$u \in M \leftrightarrow \vee_v \, v \, R \, u \tag{9.3}$$

con la ayuda de una relación «elementalmente decidible» R adecuada.

Se accede a esta forma normal (9.3) a base de considerar en los cálculos codificados no solamente las palabras, sino también, y de manera explícita, los sistemas (finitos) de palabras $p_1, \ldots, p_n$ Un sistema de palabras de este tipo recibe el nombre de «derivación» si todo p_j $(j = 1, \ldots, n)$ es conclusión de una de las reglas del cálculo codificado, bajo la condición de que solamente puedan servir de premisas palabras p_i con $i < j$. Semejante derivación recibe, más exactamente, el calificativo de derivación de p_n. Si una relación R es, en consecuencia, definida de tal modo que para un sistema $\mathfrak{G}$ de palabras y una palabra p, $\mathfrak{G}\ R\,p$ valga si y sólo si $\mathfrak{G}$ es una derivación de p, obtenemos la forma normal (9.3) para el conjunto de las palabras derivables en el cálculo.

Habremos de examinar R aún más detenidamente con el fin de mostrar que se trata de una relación decidible, averiguando a un tiempo en qué sentido es «elementalmente decidible».

Vamos a ocuparnos acto seguido de un cálculo codificado K. Además de las letras de su alfabeto α hay que contar con ciertos relatores $P_0, P_1, \ldots$ Los añadimos al alfabeto α y obtenemos un alfabeto ampliado α'. Con las variables de palabras $u, v, \ldots$ (para palabras de α), las «fórmulas» del cálculo no son otra cosa que términos basados en el alfabeto α'. Las reglas tienen la forma

$$\mathfrak{s}_{1,}, \mathfrak{s}_{2,}, \ldots,, \mathfrak{s}_n \Rightarrow \mathfrak{s}$$

con dichos términos de α'. Estas reglas sirven para la derivación de palabras α', sólo las variables quedan limitadas a palabras de α. Para introducir ahora sistemas de palabras de α', tenemos necesidad de nuevos functores $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$; Γ_n es n-ádico y $\Gamma_n\ \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \ldots \mathfrak{s}_n$ designa el sistema $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_n$. Ampliando α' con $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$

(sólo necesitamos un número finito de estos functores) obtenemos el alfabeto α''.

En lo que sigue utilizaremos $p, q, \ldots$ como variables para las palabras de α''.

Tenemos que definir ahora inductivamente el conjunto de las «derivaciones» de K como un conjunto de palabras de α''. La definición arriba dada parece llevar a un sistema infinito de reglas, en la medida en que exige definir para todo n cuando $\Gamma_n\, p_1 \ldots p_n$ puede ser considerados como una derivación. Se accede, no obstante, a una definición inductiva finita a base de definir las «derivaciones» como, palabras $\Gamma_{n+1}\, q p_1 \ldots p_n$ de tal modo que $p_1, \ldots, p_n$ sean ya derivaciones; con lo que

$$p_1 \equiv \Gamma_{n_1+1}\, q_1\, p'_1\, p'_2 \ldots p'_{n_1}$$
$$p_2 \equiv \Gamma_{n_2+1}\, q_2\, p''_1\, p''_2 \ldots p''_{n_2}$$

y q seguirá inmediatamente de $q_1, \ldots, q_n$ por una de las reglas del cálculo (véase el ejemplo aducido más abajo).

El caso $n = 0$ significa que $\Gamma_1 q$ ha de ser una derivación si q es un axioma del cálculo. Obsérvese que en virtud de nuestra codificación de las reglas del cálculo, una regla sin premisas no puede contener ninguna variable.

Una derivación, p. ej., que sobre la base de axiomas q_1, q_2 y de reglas que conducen inmediatamente de q_1, q_2 a q_3, de q_1 a q_4 y de q_2, q_3, q_4 a q_5, es escrita habitualmente en forma de árbol:

$$\dfrac{\dfrac{q_1 \quad q_2}{q_2 \quad q_3} \quad \dfrac{q_1}{q_4}}{q_5}$$

procura las siguientes palabras de α'' como derivaciones:

$\Gamma_1\, q_1$

$\Gamma_1\, q_2$

$\Gamma_3\, q_3\ \Gamma_1\, q_1\ \Gamma_1\, q_2$

$\Gamma_2\, q_4\ \Gamma_1\, q_1$

$\Gamma_4\, q_5\ \Gamma_1\, q_2\ \Gamma_3\, q_3\ \Gamma_1\, q_1\ \Gamma_1\, q_2\ \Gamma_2\, q_4\ \Gamma_1\, q_1$

Sea T el conjunto de estas derivaciones en K. Con el fin de formular la definición de T como un sistema codificado de reglas —nuestra intención no es, en efecto, sino la de mostrar que T es decidible— ha de sernos posible especificar las subpalabras que componen una palabra. Toda palabra que no es exclusivamente una letra (una constante), comienza con un functor, al que siguen tantas palabras como el número de lugares del functor exige. Siendo Γ un functor n-ádico y p la palabra $\Gamma p_1 \dots p_n$, designaremos con $\delta_j \, ' \, p$ la subpalabra p_j $(j = 1, \dots, n)$.

Daremos a las funciones δ_j el nombre de funciones predecesoras. Damos por supuesto que contienen también δ_0, definida por

$$\delta_0 \, ' \, p \equiv \Gamma$$

Toda palabra compuesta tiene, pues, como argumento δ_0. Si $\delta_0 \, ' \, p$ es un functor n-ádico, $\delta_1, \dots, \delta_n$ tendrán asimismo como argumento la palabra p. Utilizando reiteradamente la función predecesora cabe descomponer finalmente cualquier palabra en sus letras. En lugar de $\delta_{j_1} \, ' \, \delta_{j_2} \, ' \dots \delta_{j_m} \, ' \, p$ escribiremos simplificadamente

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_m} \, ' \, p$$

Cabe, pues, con estas funciones predecesoras, expresar como sigue la definición del conjunto T de las derivaciones en K:

(1) $\Gamma_1 \; q \in T$ para todo axioma q de K

(2) $\Gamma_2 \; qp_1 \in T$, si $p_1 \in T$ y si q se siguen inmediatamente de $\delta_1 \, ' \, p_1$ de acuerdo con una de las reglas de K.

(3) $\Gamma_3 \; q_1 p_1 p_2 \in T$, si $p_1 \in T$, $p_2 \in T$ y si q se siguen inmediatamente de $\delta_1 \, ' \, p_1$, $\delta_1 \, ' \, p_2$ de acuerdo con una de las reglas de K

(4),(5), ...de manera análoga para reglas con más de dos premisas.

Para esta definición de T basta con la descripción de un número finito de casos, ya que el cálculo K únicamente tiene un número finito de reglas. El cálculo del § 8 no precisa, por ejemplo, más allá de siete premisas.

Vamos a especificar asimismo cómo hay que definir la expresión: «q_0 se sigue inmediatamente de $q_1, \dots, q_n$ de acuerdo con la regla $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots \Rightarrow \mathfrak{S}$». Tomemos como ejemplo la segunda regla de (8.10):

$$\Sigma \, u_1 u_2 w_1 w_2, \, \Phi \, u_1 u_2 w_1, \, P < v \wedge u_1 \, w_1 \Rightarrow P < v w_2$$

(Regla que en forma habitual se escribe así:

$$^{u_1}/_{u_2} \, w_1 \equiv w_2, \, u_1 \text{ libre para } u_2 \text{ en } w_1, v < \wedge_{u_1} w_1 \Rightarrow v < w_2).$$

De acuerdo con esta regla se sigue, por ejemplo, inmediatamente $\vee < 0 = 0$ de las premisas:

$$\xi / 0 \, \xi = \xi \equiv 0 = 0, \, \xi \text{ libre para } 0 \text{ en } \xi = \xi, \vee < \wedge_\xi \xi = \xi.$$

Escrito de manera codificada, $P< \vee \Gamma = 00$ se sigue, pues, inmediatamente de

$$\Sigma \xi 0 \, \Gamma_= \xi \xi \, \Gamma_= 00, \; \Phi \xi 0 \, \Gamma_= \xi \xi, P< \vee \wedge \xi \, \Gamma_= \xi \xi$$

Designando las premisas con q_1, q_2, q_3 y la conclusión con q_0, tendremos que la derivación inmediata de q_0 a partir de q_1, q_2, q_3 de acuerdo con la regla dada, presupone las siguientes ecuaciones:

$$\delta_0 \, ' \, q_1 \equiv \Sigma$$

$$\delta_0 \, ' \, q_2 \equiv \Phi$$

$$\delta_0 \, q_3 \equiv P<$$

$$\delta_0 \, ' \, q_0 \equiv P<$$

$$\delta_{02} \, ' \, q_3 \equiv \wedge$$

$$\delta_1 \, ' \, q_1 \equiv \delta_1 \, ' \, q_2 \equiv \delta_{12} \, ' \, q_3 \; (\equiv \xi, \text{ sustitución por } u_1)$$

$$\delta_2 \, ' \, q_1 \equiv \delta_2 \, ' \, q_2 \qquad (\equiv 0, \text{ sustitución por } u_2)$$

$$\delta_3 \, ' \, q_1 \equiv \delta_3 \, ' \, q_2 \equiv \delta_{22} \, ' \, q_3 \; (\equiv \Gamma = \xi\xi, \text{ sustitución por } w_1)$$

$$\delta_4 \, ' \, q_1 \equiv \delta_2 \, ' \, q_0 \quad (\equiv \Gamma = 00, \text{ sustitución por } w_2)$$

$$\delta_1 \, ' \, q_3 \equiv \delta_1 \, ' \, q_0 \qquad (\equiv \vee, \text{ sustitución por } v)$$

En lo tocante a las variables, no es necesario aducir las sustituciones a ellas concernientes. Así, pues —y contando con la regla—, que q_0 se sigue inmediatamente de $q_1, \ldots, q_n$, puede ser expresado mediante un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\delta_{i_1 \ldots i m_1} \, ' \, q_{k_1} \equiv \delta_{j_1 \ldots j m_2} \, ' \, q_{k_2} \qquad (k_1, k_2 = 0,1, \ldots, n)$$

(a la derecha figuran eventualmente letras del alfabeto α').

El sistema de ecuaciones viene unívocamente determinado por las reglas únicamente. Las ecuaciones entre predecesores son evidentemente decidibles. Tanto las ecuaciones como las inecuaciones pueden ser definidas inductivamente con la ayuda de un sistema codificado de reglas. No vamos a llevar a cabo explícitamente esta tarea porque bastaría con proceder exactamente igual a como lo hemos hecho al definir, p. ej., la igualdad y la desigualdad de números y palabras. Tampoco vale la pena probar especialmente para T la decidibilidad en el sentido antes definido. Para T existe, en efecto, un procedimiento de decisión en un sentido mucho más restringido. Para decidir, por ejemplo, respecto de $p \in T$, se forma $\delta_0 \, ' \, p$. Si $\delta_0 \, ' \, p \equiv \Gamma_1$, entonces $\delta_1 \, ' \, p$ debe ser un axioma. Si $\delta_0 \, ' \, p \equiv \Gamma_{n+1}$ con $n > 0$, hay que investigar si para $\delta_1 \, ' \, p$ y para $\delta_{12} \, ' \, p, \ldots, \delta_{1,n+1} \, ' \, p$ vale uno de los sistemas de ecuaciones correspondiente a una de las reglas de K (con n premisas). Si ocurre tal, únicamente habrá ya que decidir acerca de $\delta_2 \, ' \, p \in T, \delta_3 \, ' \, p \in T, \ldots, \delta_{n+1} \, ' \, \mathrm{P} \in T$.

Tenemos, pues, en el caso de que $\delta_0 \, ' \, p \equiv \Gamma_{n+1}$, una equivalencia

$$p \in T \leftrightarrow A_n \; (\delta_2 \, ' \, p \in T, \ldots, \delta_{n+1} \, ' \, p \in T)$$

en la que A_n está compuesta únicamente a base de fórmulas dadas y de ecuaciones predecesoras con la ayuda de $\wedge$ y $\vee$. Para decidir respecto de $p \in T$ bastará con aplicar reiteradamente tales equivalencias. La decisión será así llevada de las subpalabras de p a sus subpalabras, etc. Unicamente cuando el procedimiento acaba con decisiones exclusivamente positivas (porque determinadas subpalabras son axiomas), vale $p \in T$.

Como K únicamente tiene un número finito de premisas, y, en consecuencia, el número de premisas de las reglas es limitado, vale, de manera general, una equivalencia

$$\begin{aligned} p \in T \leftrightarrow \quad & \delta_0 \, ' \, p \equiv \Gamma_1 \wedge A_0 \\ & \dot{\vee} \; \delta_0 \, ' \, p \equiv \Gamma_2 \wedge A_1 \; (\delta_2 \, ' \, p \in T) \\ & \dot{\vee} \; \delta_0 \, ' \, p \equiv \Gamma_3 \wedge A_2 \; (\delta_2 \, ' \, p \in T, \delta_3 \, ' \, p \in T) \\ & \dot{\vee} \ldots \end{aligned}$$

que escribimos abreviadamente del siguiente modo:

$$p \in T \leftrightarrow A \; (p; T)$$

A está asimismo compuesta exclusivamente a base de formulas $\delta_j \, ' \, p \in T$ y de ecuaciones predecesoras de p con la ayuda de $\wedge$, $\vee$. No vamos a hacer uso alguno del hecho de que no aparezca la negación, limitándonos a aducir la siguiente definición para relaciones cualesquiera entre palabras:

Definición 9.4. Se dice que una relación R entre palabras es elementalmente decidible si existe una equivalencia

$$p_1, \ldots, p_n \in R \leftrightarrow A \; (p_1, \ldots, p_n; R)$$

tal que en ella la fórmula A de la lógica de yuntores esté compuesta a base de ecuaciones predecesoras de $p_1, \ldots, p_n$ y de ciertas fórmulas $q_1, \ldots, q_n \in R$ con sistemas predecesores de $p_1, \ldots, p_n$ como sistemas de argumentos $q_1, \ldots, q_n$.

Admitiendo la negación se obtiene la ventaja de que de la definición 9.4 se sigue inmediatamente que con una relación R también la relación R' —complementaria de R— es elementalmente decidible. Basta para verlo con formar la negación de A y sustituir en A toda fórmula $q_1, \ldots, q_n \in R$ por $\neg \, q_1, \ldots, q_n \in R'$.

Para la definición del conjunto M de las palabras derivables en el cálculo K, del que nos venimos ocupando, obtenemos ahora, con la ayuda del conjunto de las derivaciones:

(9.4) $\quad q \in M \leftrightarrow \vee_p \,.\, p \in T \wedge \delta_1 \,\imath\, p \equiv q.$

Escribimos $p\ R\ q$ (p es una derivación de q) para $p \in T \wedge \delta_1 \,\imath\, p \equiv q$. R es en virtud de $\mathrm{p} \in T \leftrightarrow \mathrm{p}\ R\ \delta_1 \,\imath\, p$ asimismo una relación elementalmente decidible, y con ello hemos alcanzado la forma normal (9.3).

Como hemos conseguido una relación R, unívoca por la derecha (de $p\ R\ q$ se sigue, en efecto, $q \equiv \delta_1 \,\imath\, p$), M se revela incluso como campo de valor de una función.

Definición 9.5. Se dice que una función n-ádica f es elementalmente calculable si la relación

$$\in_{u1}, \ldots, u_n, {}_v f \,\imath\, u_1, \ldots, u_n = v$$

es elementalmente decidible.

Runiendo los resultados obtenidos y generalizándolos al mismo tiempo a las relaciones, tenemos el:

Teorema 9.1. Toda relación enumerable M puede ser expresada en la siguiente forma normal, con una relación R elementalmente decidible:

$$u_1, \ldots, u_n \in M \leftrightarrow \vee_v \ vRu_1, \ldots, u_n$$

Puede expresarse en particular todo conjunto enumerable M como campo de valor de una función monádica f elementalmente calculable:

$$u \in M \leftrightarrow \vee_v \ f \,\imath\, v = u$$

Con la ayuda de este teorema vamos a ocuparnos en el parágrafo siguiente de la expresabilidad aritmética de los conjuntos enumerables.

§ 10. Expresabilidad aritmética

Afirmar que todo conjunto enumerable es representable en un formalismo completo apropiado (es decir, por $P_0 u$) es una trivialidad: no de otra manera eran, precisamente, definidos los

conjuntos enumerables. Pero, más allá de esto mismo, consideramos que algunos formalismos son universales, es decir que en ellos todos los conjuntos enumerables son representables. El que sean precisamente formalismos aritméticos los que son universales, no es ninguna casualidad. Puesto que existen infinitos números, es posible representar todas las palabras de un alfabeto por medio de números. Las cifras 0, '0, ''0, ... constituyen, además, el conjunto infinito de palabras, el conjunto más fácil de construir. Y es precisamente por esta simplicidad por lo que la aritmética juega un papel tan privilegiado en la metamatemática (y no sólo en ella).

Cabe obtener de varias maneras —y, desde luego, sin dificultad alguna— una correspondencia biunívoca entre las palabras de un alfabeto, constituido por un número finito de constantes y functores, por una parte, y los números, por otra. De acuerdo con los trabajos de Gödel suele comenzarse por establecer una correspondencia entre la serie de las letras del alfabeto y la de los números impares. Estos son ya los números de Gödel para las constantes. Si $q_1, \ldots, q_r$ son palabras a las que ya se han hecho corresponder los números de Gödel $\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_r$, a la palabra $q \equiv \Gamma q_1 \ldots q_r$ le corresponderá el número de Gödel

$$\widetilde{q} = \pi_0^{n_0}\ \pi_1^{\widetilde{q}_1}\ \ldots\ \pi_r^{\widetilde{q}_r}$$

donde n_0 es el número impar correspondiente a Γ y $\pi_0, \pi_1, \ldots$ la serie de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, ... Para decidir si un número n es el número de Gödel de una palabra —y, en caso positivo, de qué palabra— hay que descomponer n en factores primos:

$$n = \pi_0^{n_0}\ \pi_1^{n_1}\ \ldots\ \pi_r^{n_r}$$

Si n es impar, es decir, si $n_0 = 0$, n sólo podrá ser el número de Gödel de una constante. Si $n_0 > 0$ y n_0 corresponde a un functor r-ádico Γ, los números $n_1, \ldots, n_r$ tendrán que ser examinados para averiguar si son números de Gödel. Si tal es el caso y si se da, pongamos,

$$n_1 = \widetilde{q}_1, \ldots, n_r = \widetilde{q}_r$$

n será el número de Gödel de $\Gamma q_1 \ldots q_r$.

Con la ayuda de esta correspondencia biunívoca entre palabras y números cabe «aritmetizar» todas las relaciones y funciones.

Sea R una relación r-ádica de palabras. La relación r-ádica R de números queda definida determinando que $n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R}$ ha de valer precisamente para aquellos sistemas de números de Gödel $n_1 = \widetilde{q_1}, \ldots, n_r = \widetilde{q_r}$ para los que vale $q_1, \ldots, q_r \in R$.

$\widetilde{R}$ es una relación aritmética. Calificaremos de «aritméticamente enumerables» a las relaciones aritméticas $\widetilde{R}$ provinientes de relaciones R enumerables. Como la numeración de Gödel es decidible, las relaciones aritméticamente enumerables son también enumerables como relaciones de las palabras de números 0, ′0, ″0, ... Pero no toda relación de palabras de números es aritméticamente enumerable; no lo es, por ejemplo, el conjunto de todas las cifras impares: en el caso de un alfabeto finito únicamente cabe contar con un número finito de cifras impares como números de Gödel. Partiendo de una relación entre números será preciso expresarlos por medio de 0, ′0, ″0, ... y formar asimismo sus números de Gödel, como, p. ej.:

$$\widetilde{0} = 1$$
$$\widetilde{'0} = 2^3\, 3^1$$
$$\widetilde{''0} = 2^3\, 3^{2^3 3^1}$$
$$\cdots\cdots$$

Una relación R entre cifras es enumerable si y sólo si la relación correspondiente $\widetilde{R}$ entre estos números de Gödel es aritméticamente enumerable.

La numeración gödeliana sirve también para establecer una correspondencia entre las funciones aritméticas y las funciones predecesoras δ_0, δ_1, δ_2, ... Las designaremos, asimismo, con $\widetilde{\delta}_0$, $\widetilde{\delta}_1$, $\widetilde{\delta}_2$, ... Así, pues, para:

$$n = \pi_0^{n_0}\ \pi_1^{n_1}\ \pi_2^{n_2}\ \ldots\ \pi_r^{n_r}$$

valdrá

$$\widetilde{\delta}_0\, \imath\, n = n_0,\ \widetilde{\delta}_1\, \imath\, n = n_1, \ldots,\ \widetilde{\delta}_r\, \imath\, n = n_r$$

En la numeración gödeliana las funciones predecesoras aritméticas son, simplemente, los exponentes de la descomposición

en números primos. Como argumentos únicamente entran, no obstante, los números de Gödel de las palabras compuestas.

Vamos a buscar ahora las expresiones aritméticas para las relaciones aritméticamente enumerables $\widetilde{R}$. Tendremos que dar, pues, con fórmulas $A\ (x_1, \ldots x_r)$ del formalismo de Peano tales que $n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R}$ valga si y sólo si $A\ (n_1, \ldots, n_r)$ vale en la aritmética constructiva.

La forma normal del teorema 9.1 permite limitarse a la expresión aritmética de las relaciones elementalmente decidibles. Como a las funciones predecesoras les corresponde un papel importante en la definición de la decidibilidad elemental, vamos a dedicarnos primero a la expresión aritmética de las funciones predecesoras aritméticas $\widetilde{\delta}_0$, $\widetilde{\delta}_1$, ...

De acuerdo con su definición vale

$$(10.1) \qquad \widetilde{\delta}_j\, \imath\, n = m \leftrightarrow \pi_j{}^m \mid n \wedge \neg\, \pi_j{}^{m+1} \mid n$$

La relación de divisibilidad $\mid$ que figura en (10.1) queda, a su vez, definida por:

$$l \mid n \leftrightarrow \vee_k\ k \cdot l = n$$

A pesar de la aparición de un cuantificador existencial $\vee_k$ en esta expresión, la relación de divisibilidad no es únicamente, desde luego, enumerable, sino también decidible. Lo que se debe al hecho de que para decidir acerca de $l|n$ no hace falta examinar todos los números k para ver si entre ellos figura uno tal que $k \cdot l = n$. Unicamente deben ser examinados los números $k \leq n$. Tenemos, pues, la expresión siguiente:

$$(10.2) \qquad l \mid n \leftrightarrow V_k \cdot k \leq n \wedge k \cdot l = n$$

De manera general escribiremos ahora

$$\underset{n}{\vee}_k\ A\ (k) \text{ en lugar de } \vee_k \cdot k \leq n \wedge A\ (k)$$

calificando a $\underset{n}{\vee}_k$ de cuantificador existencial restringido. Los cuantificadores universales restringidos quedan definidos, de manera dual, por

$$\underset{n}{\wedge}_k\ A\ (k) \leftrightharpoons \wedge_k \,.\, \neg\, k \leq n \vee A\ (k).$$

Los cuantificadores restringidos jugarán un papel importante en lo sucesivo.

Es evidente que la relación de orden $\leq$ es aritméticamente realizable con la ayuda de

$$k \leq n \leftrightarrow \vee_l k + l = n$$

(10.1) y (10.2) dan lugar a la equivalencia

$$(10.3) \qquad \widetilde{\delta}_j\, n = m \leftrightarrow \underset{n}{\vee_k} k \,.\, \pi_j{}^m = n \wedge \neg \underset{n}{\vee_k} k \cdot \pi_j{}^{m+1} = n$$

Esta no es expresión aritmética alguna, ya que a la derecha aún aparece el término $\pi_j{}^m$, que no pertenece a los términos del formalismo de Peano. Si se sustituye (10.3) por,

$$(10.4) \qquad \widetilde{\delta}_j\, n = m \leftrightarrow \underset{n}{\vee_l} \,.\, \pi_j{}^m = l \wedge \underset{n}{\vee_k} \cdot l = n \wedge \neg \vee_k k \cdot (l \cdot \pi_j) = n.$$

aún tienen que ser expresadas las relaciones exponenciales $\in_{m,n}$ $\pi_m = n$ para los números primos π con ayuda de la adición y de la multiplicación.

Lo cual es posible sobre la base de la siguiente equivalencia

$$\pi^m = n \leftrightarrow m = 0 \wedge n = 1 \,\dot{\vee}\, \pi \cdot \pi^{m-1} = n$$

por tanto

$$(10.5) \qquad \pi^m = n \leftrightarrow m = 0 \wedge n = 1 \,\dot{\vee}\, \underset{n}{\vee_k} \cdot \pi \cdot k = n \wedge \pi^{m-1} = k.$$

Se trata de una equivalencia del tipo de la que se exige para la decidibilidad elemental. Tomando las cifras 0, '0, ''0, ... como palabras, se obtiene un predecesor —en el sentido de la definición 9.3— quitando un signo '. En este sentido *m-1* es, pues, un predecesor de *m*. La parte derecha de (10.5) no está compuesta, sin embargo, a base únicamente de la lógica de yuntores, sino que también figuran en ella cuantificadores restringidos. El empleo de la fórmula de la multiplicación en lugar de las «ecuaciones predecesoras» de la deficinión 9.3 no dificulta en modo alguno la expresabilidad. Nuestra intención es, precisamente, reducirlo todo a la adición y a la multiplicación.

Eliminando de (10.5) el término *m-1*, obtenemos

$$(10.6) \qquad \pi^m = n \leftrightarrow m = 0 \wedge n = 1 \,\dot{\vee}\, \underset{n}{\vee_k} \underset{m}{\vee^l} \cdot \pi \cdot k = n \wedge l + 1 = m \wedge \pi^l = k.$$

Para hacer un cálculo de la nueva situación nos serviremos de la:

Definición 10.1. Se dice que una relación aritmética $\widetilde{R}$ es expresable en sentido restringido si hay una fórmula $A\,(x_1, ..., x\,)$ formada a base de las fórmulas primitivas del formalismo de Peano, con la exclusiva ayuda de yuntores y cuantificadores restringidos, tal que

$$n_1, ..., n \in \widetilde{R} \leftrightarrow A\,(n_1, ..., n_r)$$

valga para todo $n_1, ..., n_r$.

Daremos el nombre de fórmulas restringidas del formalismo de Peano a las fórmulas $A\,(x_1, ..., x_r)$ que aquí aparecen. En ellas figuran sólo cuantificadores $\underset{z}{\wedge_z}$, $\underset{z}{\vee_z}$, lo que nos obliga a poner la condición de que la variable z no aparezca en el término t (por ejemplo, $\underset{z}{\wedge_z}$ no sería un cuantificador restringido).

De todo esto se desprende inmediatamente que sólo las relaciones decidibles son expresables en sentido restringido. Sin que ocurra lo recíproco, como el lector interesado puede comprobar en el § 57 de KLEENE, 1952. Ahora bien, vamos a mostrar que las relaciones elementalmente decidibles en la forma normal del teorema 9.1 de las relaciones aritméticamente enumerables pueden ser sustituidas por relaciones expresables en sentido restringido.

Definición 10.2. Una equivalencia válida

$$n_1, ..., n_r \in \widetilde{R} \leftrightarrow \vee_m \; A\,(m; n_1, ..., n_r)$$

en la que $A\,(x; y_1, ..., y_r)$ es una fórmula restringida del formalismo de Peano, recibe el nombre de expresión aritmética normal de $\widetilde{R}$.

Bastará con mostrar que las relaciones elementalmente decidibles poseen una expresión aritmética normal. De acuerdo con el teorema 9.1 las relaciones aritméticamente enumerables tienen también una expresión aritmética normal.

La expresión aritmética normal de las relaciones elementalmente decidibles exige, en primer lugar, una expresión aritmética normal para las relaciones exponenciales, $\in_{m,n} \pi^m = n$.

Esta tarea debe ser resuelta siguiendo el modelo de los trabajos de GÖDEL, a quien se debe la introducción de una función especial, la llamada función β. Para trasponer la expresabilidad a las relaciones elementalmente decidibles vamos a servirnos de una relación β análoga. La idea clave de la prueba es la siguiente. Considérese la función característica χ de la relación $\in_{m,n} \pi^m = n$. Esta es definida por

$$\chi\, 1\, m, n = \begin{cases} 1, \text{ si } \pi^m = n \\ 0 \text{ si no.} \end{cases}$$

En virtud de (10.5) $\chi\, 1\, m, n$ está unívocamente determinada si $\chi\, 1\, m\text{-}1, k$ ha sido dada para $k \leq n$. Ordenando los números

$$\begin{array}{llll} \chi\, 1\, 0,0 & \chi\, 1\, 0,1 & \chi\, 1\, 0,2 & \ldots\ldots \\ \chi\, 1\, 1,0 & \chi\, 1\, 1,1 & \chi\, 1\, 1,2 & \ldots\ldots \\ \chi\, 1\, 2,0 & \chi\, 1\, 2,1 & \ldots\ldots & \\ & \ldots\ldots & & \end{array}$$

por enumeración diagonal en una sucesión

$$\chi\, 1\, 0,0;\ \chi 1\, 1,0;\ \chi 1\, 0,1;\ \chi 1\, 2,0;\ \chi 1\, 1,1;\ \ldots$$

se consigue que cada uno de ellos esté unívocamente determinado en virtud de (10.5) por todos los que le preceden.

Si $\langle m, n\rangle$ designa el número $2\left(\binom{m+n+1}{2} + n + 1\right)$, $\langle m, n\rangle$ procura el doble del número de orden de $\chi\, 1\, m, n$ en esta sucesión. $\langle m, n\rangle$ es un polinomio en m, n, a saber: $(m + n)^2 + m + 3n + 2$; expresable, en consecuencia, por un término del formalismo de Peano.

Pongamos ahora

$$\beta_{ij}\ (m, n) \leftrightharpoons \langle m, n\rangle\, i + 1|j$$

Esta relación β es expresable en sentido restringido. Por otra parte, para todo m y n hay i y j apropiadas tales que

$$(10.7) \qquad \beta_{ij}\ (k, l) \leftrightarrow \pi^k = l \quad \text{para todos } k \leq m \text{ y } l \leq n$$

Prueba: Póngase $i = \langle m, n\rangle!$ (! designa la factorial) y

$$j = \prod_{0,0}^{m,n}{}_{k,l}\ (\langle k, l\rangle\, i + 1)^{\chi_{1k,l}}$$

Respecto de (10.7) basta con mostrar que todos los factores de j son primos entre sí. Ello se deduce del hecho de que un divisor primo π' de dos factores distintos de j también sería divisor de la diferencia $(\langle k_1, l_1\rangle - \langle k_2, l_2\rangle)\, i$. Como aquí el primer factor, tomado absolutamente, es $\leq \langle m, n\rangle$, sería un divisor de i, y el número primo π' sería también un divisor de i, lo cual está en contradicción con el hecho de que π' debería ser un divisor de números de la forma $\langle k, l\rangle\, i + 1$.

Con (10.6) obtenemos acto seguido

$$(10.8) \qquad \begin{array}{l} \pi^m = n \leftrightarrow \vee_{i,j}\ .\ \beta_{i,j}\ (m, n) \wedge \wedge_{k,l}\ .\ \beta_{ij}\ (k, l) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow k = 0 \wedge l = 1 \vee \vee_{k_0}^{k}\ \vee_{l_0}^{l}\ .\ \pi \cdot l_0 = l \wedge k_0 + 1 = \\ = k \wedge \beta_{ij}\ (k_0, l_0)\ \ldots \end{array}$$

Prueba: Si vale $\pi^m = n$, se escoje i, j, como arriba, y en virtud de (10.7) valdrá $\beta_{ij}\ (m, n)$; por otra parte, también valdrá, en virtud de (10.6), el segundo miembro de la conjunción de la parte derecha de (10.8).

Por el contrario, si esta parte derecha es la que vale, $\beta_{ij}\ (k, l)$ satisface exactamente las equivalencias válidas, en virtud de (10.6), para $\pi^k = l$. Y como gracias a estas aquivalencias está unívocamente determinada la validez de $\pi^k = l$, vale (10.7). De manera, pues, que $\pi^m = n$ vale también si la parte derecha es válida.

La expresión (10.8) se diferencia de una expresión aritmética normal únicamente por comenzar con dos cuantificadores existenciales en lugar de hacerlo con uno solo. La fórmula $\beta\ (i, j, m, n)$ que sigue a los cuatificadores existenciales es equivalente —en

virtud de la expresabilidad en sentido restringido de la relación β— a una fórmula restringida. Ahora bien, como se puede reemplazar sin más

$$\vee_{i,j}\ \beta\,(i, j, m, n)$$

por $\quad \vee_h \underset{h}{\vee_i}\ \underset{h}{\vee_j} .\ h = \langle i, j\rangle \wedge B\,(i, j, m, n).$

la expresabilidad normal de la relación exponencial queda demostrada.

Introduciendo en (10.4) expresiones normales de la forma

$$\pi_j{}^m = n \leftrightarrow \vee_h B_j\,(h, m, n)$$

obtenemos

$$\widetilde{\delta}_j\, \imath\, n = m \leftrightarrow \underset{n}{\vee_l} \cdot \vee_h B_j\,(h, m, l) \wedge C_j\,(l, n).$$

y, en consecuencia,

$$\widetilde{\delta}_j\, \imath\, n = m \leftrightarrow \vee_h\ \underset{n}{\vee_l} \cdot B_j\ (h, m, l) \wedge C_j\,(l, n).$$

De este modo tenemos también expresiones aritméticas normales para las relaciones predecesoras aritméticas.

No es difícil aplicar estos razonamientos en torno a la expresión normal a cualesquiera relaciones elementalmente decidibles. Para una relación r-ádica hay que utilizar una relación β:

$$\beta_{ij}\,(m_1, \ldots, m_r) \rightleftharpoons \langle m_1, \ldots, m_r\rangle\, i + 1 \,|\, j$$

con

$$\langle m_1, m_2, m_3\rangle = \langle\langle m_1, m_2\rangle, m_3\rangle$$
$$\langle m_1, m_2, m_3, m_4\rangle = \langle\langle m_1, m_2, m_3\rangle, m_4\rangle$$

Para $r = 1$ se pondrá simplemente $\langle m\rangle = m + 1$.

Si $\widetilde{R}$ es elementalmente decidible, vale la equivalencia

(10.9) $\qquad n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R} \leftrightarrow A\,(n_1, \ldots, n_r; \widetilde{R})$

En A figuran ecuaciones predecesoras y como argumento de $\widetilde{R}$ únicamente hay a la derecha sistemas $m_1, \ldots, m_r$, que preceden a $n_1, \ldots, n_r$, en el sentido de que m_1 es predecesor de n_1 (eventualmente $= n_1$), m_2 es predecesor de n_2 (eventualmente $= n_2$), ...; una vez al menos ha de figurar, no obstante, un predecesor real.

Para i, j apropiados vale nuevamente

(10.10) $\qquad \beta_{ij}\,(k_1, \ldots, k_r) \leftrightarrow k_1, \ldots, k_r \in \widetilde{R}$

para todos $k_1 \leq n_1, \ldots, k_r \leq n_r$

y se obtiene

(10.11) $\qquad n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R} \leftrightarrow \vee_{i,j} \cdot \beta_{ij}\,(n_1, \ldots, n_r) \wedge \underset{n_1, \ldots, n_r}{\wedge_{k_1, \ldots, k_r}}$

$$\beta_{ij}\,(k_1, \ldots, k_r) \leftrightarrow A\,(k_1, \ldots, k_r; \beta_{ij}).$$

Si en (10.11) se sustituyen todos los términos predecesores que se presentan, de acuerdo con el esquema

$$B(\ \widetilde{\delta}\ \imath\, m) \leftrightarrow \underset{m}{\vee_{m_0}} \cdot\ \widetilde{\delta}\ \imath\, m = m_0 \wedge B\,(m_0)$$

por relaciones predecesoras, sustituyendo estas últimas por su expresión normal, se obtiene una expresión aritmética normal

$$n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R} \leftrightarrow \vee_h\ C\,(h, n_1, \ldots, n_r)$$

Juntamente con el teorema 9.1 se obtiene, por último, el

Teorema 10.1. Toda relación aritméticamente enumerable $\widetilde{R}$ tiene una expresión aritmética normal

$$n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R} \leftrightarrow \vee_h\ C\,(h, n_1, \ldots, n_r)$$

con una fórmula restringida C del formalismo de Peano.

Como prueba basta, asimismo, con reducir, de acuerdo con el esquema:

$$\vee_i\ \vee_j .\cdots \leftrightarrow \vee_h\ \underset{h}{\vee_i}\ \underset{h}{\vee_j} \cdot h = \langle i, j\rangle \wedge \cdots$$

el cuantificador existencial de la forma normal del teorema 9.1 y el cuantificador existencial de la expresión aritmética normal a la subsiguiente relación elementalmente decidible.

En el teorema 10.1 todavía cabe especializar más la fórmula restringida C (cfr., p. ej., DAVIS, 1958), pero de ello no se deriva ninguna ventaja para nuestra prueba ulterior en el § 11.

§ 11. REPRESENTABILIDAD ARITMÉTICA

De las expresiones aritméticas normales de las relaciones enumerables y, especialmente, de las decidibles, vamos a pasar ahora a la representabilidad de estas relaciones en el formalismo de Peano. Para ello habremos de considerar primero las relaciones expresables en sentido restringido. Puede suponerse que una relación $\widetilde{R}$ expresable por un fórmula restringida $A\ (x_1, \ldots, x_r)$ sea también representable por esta fórmula, es decir, que

$$(11.1) \qquad n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R} \longleftrightarrow \vdash A\ (\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r)$$

valga para todos los números $n_1, \ldots, n_r$.

La prueba no presenta, de hecho, la menor dificultad. En ella podemos prestar, al mismo tiempo, atención al uso que realmente tengamos que hacer de los axiomas de Peano. Veremos así, efectivamente, que incluso el esquema de la inducción puede ser sustituido por el axioma

$$(11.2) \qquad x = 0 \vee \bigvee_y\ x = y'$$

como observó por vez primera R. M. ROBINSON en 1950. El «formalismo de Robinson» obtenido mediante esta sustitución es, por supuesto, demasiado débil para reemplazar al de Peano. Sólo formaliza un fragmento de la aritmética. No cabe, por ejemplo, deducir en él ni siquiera $\neg\ x = x'$. Como prueba de esta inderivabilidad compruébese que todos los axiomas del formalismo de Robinson quedan satisfechos si se añade a los números naturales un nuevo elemento ∞, para el que se define:

$$\infty' = \infty$$

$$\infty + n = n + \infty = \infty$$

$$\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$$

y $$\infty \cdot n = n \cdot \infty = \infty \text{ para } n \neq 0$$

Como este «modelo» no satisface el teorema $\bigwedge_x \neg\ x = x'$ (por $\infty = \infty'$), este teorema no podrá ser deducido de los axiomas, en virtud de la consistencia de la lógica clásica probada en el § 3.

Ahora bien, para la representabilidad de la que nos ocupamos basta el sistema de Robinson como sistema aritmético de axiomas.

Vamos a probar la representabilidad reemplazando (11.1) por las siguientes (meta-)implicaciones:

$$(11.3) \qquad \begin{cases} n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R} \longrightarrow \vdash A\ (\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r) \\ n_1, \ldots, n_r \notin \widetilde{R} \longrightarrow \vdash \neg\ A\ (\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r) \end{cases}$$

Como $\neg\ A$ es —al igual que A— una fórmula restringida, tampoco aquí es la segunda tesis otra cosa que una tesis parcial de la representabilidad. Basta, no obstante, con probar (11.3) para acceder a (11.1): si vale $\vdash A\ (\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r)$, bajo la hipótesis de (11.3) $n_1, \ldots, n_r \notin \widetilde{R}$ no puede valer, ya que de lo contrario valdría $\vdash \neg\ A\ (\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r)$, con lo cual el formalismo sería inconsistente. Ahora bien, si no vale (en la aritmética constructiva) $n_1, \ldots, n_r \notin \widetilde{R}$ habrá de valer $n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R}$, ya que $\widetilde{R}$ es decidible en la medida en que es una relación realizable en sentido restringido. Valen así, pues, también ambas inversiones de (11.3). De ahí que demos a esta representabilidad el nombre de representabilidad fiel para la negación.

Comenzamos la prueba de (11.3) con la representabilidad fiel para la negación de las fórmulas primitivas.

$$(11.4) \qquad m = n \longrightarrow \vdash \underline{m} = \underline{n}$$

Prueba: para $m = n$, el axioma $x = x$ da $\vdash \underline{m} = \underline{n}$.

$$(11.5) \qquad m \neq n \longrightarrow \vdash \neg\ \underline{m} = \underline{n}$$

Prueba: para $m \neq n$ vale bien $m > n$, bien $m < n$. En el caso de

$m > n$, se tendrá, a partir del axioma $x' = y' < x = y$ en n pasos $\underline{m} = \underline{n} < \underline{m} - \underline{n} = 0$. Del axioma $x' = 0 < \Lambda$ se sigue, acto seguido, $\vdash \neg \underline{m} = \underline{n}$. Para $m < n$ se procede de igual manera.

(En esta prueba —al igual que en la siguiente— nos servimos de $\vdash$ para designar la derivabilidad de una fórmula A, es decir, la derivabilidad de la implicación $\vee < A$; de todos modos, no expresamos la derivabilidad de una implicación anteponiéndole un $\vdash$, sino, simplemente, escribiendo la propia implicación. El signo $<$ designa, pues, la derivabilidad de la implicación.)

En virtud de $\underline{m}' = \underline{m}'$ (11.4) y (11.5) dan lugar, asimismo, a

$$(11.6) \qquad \begin{cases} m' = n \longrightarrow & \vdash \underline{m}' = \underline{n} \\ m' \neq n \longrightarrow & \vdash \neg \underline{m}' = \underline{n} \end{cases}$$

Por otra parte, vale:

$$(11.7) \qquad k + m = n \longrightarrow \vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}$$

Prueba por inducción (a nivel metalingüístico) sobre m:

$\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}$ se obtiene para $m = 0$ en virtud del axioma $x + 0 = x$. De $k + m' = n$ se sigue $k + m = n_0$ con $n_0' = n$. Si $\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n_0}$ vale por hipótesis de inducción, el axioma $x + y' = (x + y)'$ da lugar, juntamente con (11.6) y el axioma de igualdad, a

$$(11.8) \qquad k + m \neq n \longrightarrow \vdash \neg \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}$$

Prueba: De $k + m \neq n$ se sigue $\vee_l \cdot k + m = l \wedge l \neq n$. De acuerdo con (11.5) y (11.7) vale, pues,

$$\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{l} \text{ y } \vdash \neg \underline{l} = \underline{n} \text{ para un } l$$

Los axiomas de igualdad proporcionan

$$\underline{k} + \underline{m} = \underline{l} \wedge \underline{k} + \underline{m} = \underline{n} < \underline{l} = \underline{n}$$

por tanto $\vdash \neg \underline{k} + \underline{m} = \underline{n}$.
Las pruebas para la multiplicación

$$(11.9) \qquad \begin{cases} k \cdot m = n \longrightarrow \vdash \underline{k} \cdot \underline{m} = \underline{n} \\ k \cdot m \neq n \longrightarrow \vdash \neg \underline{k} \cdot \underline{m} = \underline{n} \end{cases}$$

deben ser efectuadas de manera semejante.

Con el fin de inferir la representabilidad fiel para la negación de cualesquiera fórmulas primitivas a partir de todo lo anterior, será necesario mostrar primero inductivamente que de la hipótesis de la representabilidad fiel para la negación de ecuaciones $s = x$ y $t = y$ se sigue la representabilidad fiel para la negación de $s' = z$, de $s + t = z$ y de $s \cdot t = z$. Para ello se utilizan únicamente los axiomas de igualdad. La representabilidad fiel para la negación de toda fórmula primitiva $s = t$ se sigue, asimismo, de suyo.

Como preparación de la representabilidad fiel para la negación de la relación de orden $x \leq y$ por la fórmula $\vee_z z + x = y$, llamamos la atención primero acerca de

$$(11.10) \qquad \vdash x + y^{(n)} = (x + y)^{(n)}$$

donde (n) indica n apóstrofos $'$.

Prueba por inducción sobre n: $x + y' = (x + y)'$ es un axioma, y asimismo lo es $x + y^{(n+1)} = (x + y^{(n)})'$. De la hipótesis de inducción se sigue, pues,

$$\vdash x + y^{(n+1)} = (x + y)^{(n+1)}$$

juntamente con los axiomas de igualdad.

Especialmente para $y = 0$ resulta, en virtud de (11.10),

$$(11.11) \qquad \vdash x + \underline{n} = x^{(n)}$$

Acto seguido obtenemos

$$(11.12) \qquad m \leq n \longrightarrow \vdash \vee_z z + \underline{m} = \underline{n}$$

Prueba: De $m \leq n$ se sigue $\vee_z k + m = n$, y por (11.7)

$$\vdash \underline{k} + \underline{m} = \underline{n} \text{ para un } k.$$

De donde se sigue lógicamente $\vee_z z + \underline{m} = \underline{n}$.

$$(11.13) \qquad m \not\leq n \longrightarrow \vdash \neg \vee_z z + \underline{m} = \underline{n}$$

Prueba: De $m \leq n$ se sigue $n < m$, y, por tanto $\vee_k k' + n = m$. Con (11.11) obtenemos

$$\begin{aligned} z + \underline{m} = \underline{n} &< z^{(m)} = \underline{n} \\ &< z^{(k'+n)} = \underline{n} \\ &< z^{(k')} = 0 \qquad \text{por } x' = y' < x = y \\ &< \Lambda \qquad\quad \text{por } \vdash \neg\, x' = 0 \end{aligned}$$

y, en consecuencia, $\vee_z z + \underline{m} = \underline{n} < \Lambda$, es decir, $\vdash \neg \vee_z z + \underline{m} = \underline{n}$.

Toda composición en lógica de yuntores de fórmulas que son autorrepresentables —con representabilidad fiel para la negación— es, evidentemente, asimismo autorrepresentable —con representabilidad fiel para la negación—. Si vale, por ejemplo,

$$A \longrightarrow \vdash A, \neg A \longrightarrow \vdash \neg A$$

y

$$B \longrightarrow \vdash B, \neg B \longrightarrow \vdash \neg B$$

valdrá también $A \wedge B \longrightarrow \vdash A \wedge B$ y $\neg .\, A \wedge B. \longrightarrow \vdash \neg .\, A \wedge B$.

Prueba: de $A \wedge B$ se sigue $\vdash A$ y $\vdash B$, por tanto, $\vdash A \wedge B$. De $\neg .\, \wedge B.$ se sigue —para un A y un B decidibles— $\neg A$ o $\neg B$, lo que da $\vdash \neg A \vee \neg B$ y, por tanto, $\vdash \neg .\, A \wedge B$.

Las composiciones con $\vee$ han de ser tratadas de manera semejante. El caso de la negación es trivial, porque para las fórmulas decidibles vale también constructivamente $\neg \neg A \leftrightarrow A$.

Sólo quedará, pues, por considerar el caso de las composiciones a base de cuantificadores restringidos. Para todo m vale

$$A(m) \longrightarrow \vdash A(\underline{m})$$

y

$$\neg A(m) \longrightarrow \vdash \neg A(\underline{m})$$

De donde se sigue inmediatamente

$$(11.14) \qquad \vee_{n\,m} A(m) \longrightarrow \vdash \vee_{\underline{n}\,x} A(x)$$

ya que de $\vee_{n\,m} A(m)$ se sigue $m \leq n \wedge A(m)$ para un m, o sea, $\vdash \underline{m} \leq \underline{n} \wedge A(\underline{m})$.

De donde se sigue lógicamente $\vdash \vee_x \cdot x \leq \underline{n} \wedge A(x)$.

$$(11.15) \qquad \neg \wedge_{n\,m} A(m) \longrightarrow \vdash \neg \wedge_{\underline{n}\,x} A(x)$$

puede retrotraerse a lo que precede, ya que —para un $A(x)$ decidible— de $\neg \wedge_{n\,m} A(m)$ se sigue, incluso en aritmética constructiva, $\vee_{n\,m} \neg A(m)$, es decir, $\vdash \vee_{\underline{n}\,x} \neg A(x)$ y, en consecuencia, $\vdash \neg \wedge_{\underline{n}\,x} A(x)$.

Queda, pues, por considerar:

$$(11.16) \qquad \wedge_{n\,m} A(m) \longrightarrow \vdash \wedge_{\underline{n}\,x} A(x)$$

$$(11.17) \qquad \neg \vee_{n\,m} A(m) \longrightarrow \vdash \neg \vee_{\underline{n}\,x} A(x)$$

(11.17) puede ser retrotraído a (11.16). En lo tocante a (11.16) se tendrá que probar:

$$A(0) \wedge A(0') \wedge \ldots \wedge A(\underline{n}) < \wedge_{\underline{n}\,x} A(x)$$

Como para todo m vale

$$A(\underline{m}) \wedge x = \underline{m} < A(x)$$

para todo $m \leq n$ vale también

$$A(0) \wedge A(0') \wedge \ldots \wedge A(\underline{n}) \wedge x = \underline{m} < \neg\, x \leq \underline{n} \vee A(x)$$

Y, de manera trivial, tenemos la validez de

$$A(0) \wedge A(0') \wedge \ldots \wedge A(\underline{n}) \wedge \neg\, x \leq \underline{n} < \neg\, \underline{n} \vee A(x)$$

De ahí que baste con mostrar que

$$(11.18) \qquad \vdash x = 0 \vee x = 0' \vee \ldots \vee x = \underline{n} \vee \neg\, x \leq \underline{n}$$

Unicamente para este último se utiliza el axioma de Robinson (11.2). Para $n = 0$ hay que demostrar

$$\vdash x = 0 \vee \neg\, x \leq 0$$

El axioma de Robinson da $\vdash x = 0 \vee \vee_y x = y'$.

Por $$x = y' \wedge z + x = 0 < z + y' = 0$$
$$< (z + y)' = 0$$
$$< \wedge$$

vale también $\vee_y x = y' \wedge \vee_z z + x = 0 < \wedge$

por tanto, $$\vee_y x = y' < \neg \vee_z z + x = 0$$
$$\vee_y x = y' < \neg x \leq 0.$$

Como hipótesis de inducción tomamos ahora

$$\vdash y = 0 \vee \ldots \vee y = \underline{n} \vee \neg y \leq \underline{n}$$

Por $y = \underline{m} < y' = \underline{m}'$ y $\neg y \leq \underline{n} < \neg y' \leq n'$

(vale, en efecto, $z + y = \underline{n} \asymp (z + y)' = \underline{n}' \asymp z + y' = \underline{n}'$)

se sigue $\vdash y' = 0' \vee \ldots \vee y' = \underline{n}' \vee \neg y' \leq \underline{n}'$.

y, en consecuencia, $x = y' < x = 0' \vee \ldots \vee x = \underline{n}' \vee \neg x \leq \underline{n}'$.

La aplicación del axioma de Robinson de lugar al buscado

$$\vdash x = 0 \vee x = 0' \vee \ldots \vee x = \underline{n}' \vee \neg x \leq \underline{n}'$$

También el caso general de un cuantificador restringido, p. ej.,

$\overset{\wedge_x}{t(y_1, \ldots, y_r)}$ $A(y_1, \ldots, y_r, x)$, en el que x no figura en $t(y_1, \ldots, y_r)$

puede ser tratado de este modo. Accedemos así al siguiente resultado:

Teorema 11.1. Toda relación aritmética $\widetilde{R}$ expresable en sentido restringido es representable de manera fiel para la negación en el formalismo de Robinson: hay una fórmula restringida $A\ (x_1, \ldots, x_r)$ tal que para todos los números $n_1, \ldots, n_r$ vale

$$n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R} \longrightarrow \vdash A\ (\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r)$$
$$n_1, \ldots, n_r \notin \widetilde{R} \longrightarrow \vdash \neg A\ (\underline{n}_1, \ldots \underline{n}_r)$$

Toda fórmula restringida es autorrepresentable de manera fiel para la negación.

Ya sólo falta un paso para acceder a la meta que nos propusimos en el § 9, es decir, la prueba de la representabilidad de todas las relaciones decidibles.

Teorema 11.2. Toda relación decidible es representable de manera fiel para la negación en el formalismo de Robinson.

Hacemos preceder la prueba de este teorema de un lema auxiliar respecto del formalismo de Robinson:

(11.19) $\vdash x \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq x$

Prueba: El caso $n = 0$ es trivial por $\vdash 0 \leq x$, ya que $x + 0 = x$ es un axioma. Tomando como hipótesis de inducción $\vdash y \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq y$ se sigue $\vdash y' \leq \underline{n}' \vee \underline{n}' \leq y'$

y, en consecuencia, $x = y' < x \leq \underline{n}' \vee \underline{n}' \leq x$.

Como $x = 0 < x \leq \underline{n}' \vee \underline{n}' \leq x$

es asimismo trivial por $\vdash 0 \leq \underline{n}'$, una aplicación del axioma de Robinson procurará

$$\vdash x \leq \underline{n}' \vee \underline{n}' \leq x.$$

En la prueba del teorema 11.2 nos limitamos a manejar el caso de un conjunto decidible $\widetilde{M}$, ya que para las relaciones todo discurre análogamente. Si $\widetilde{M}$ es decidible, $\widetilde{M}$ y el complemento de $\widetilde{M}$ son enumerables. Existen, pues, expresiones aritméticas normales

$$n \in \widetilde{M} \longleftrightarrow \vee_m A\ (m, n)$$
$$n \notin M \longleftrightarrow \vee_m B\ (m, n)$$

con fórmulas restringidas $A\ (x, y)$ y $B\ (x, y)$.

Sostenemos, siguiendo a ROSSER, 1936, que la fórmula

$$\vee_x \ . \ A(x, z) \wedge \underset{x}{\wedge}_y \neg B(y, z).$$

es la representación fiel para la negación de $z \in \widetilde{M}$. La validez de

$$n \in \widetilde{M} \longrightarrow \vdash \vee_x \ . \ A(x, \underline{n}) \wedge \underset{x}{\wedge}_y \ \neg B(y, \underline{n})$$

se obtiene así:

$$\begin{aligned} n \in \widetilde{M} &\longrightarrow \vee_m \ A(m, n) \\ &\longrightarrow \vdash A(\underline{m}, \underline{n}) \quad \text{para un } m \end{aligned}$$

Por otra parte
$$\begin{aligned} n \in \widetilde{M} &\longrightarrow \neg \vee_l \ B(l, n) \\ &\longrightarrow \wedge_l \neg B(l, n) \\ &\longrightarrow \underset{m}{\wedge}_l \neg B(l, n) \\ &\longrightarrow \vdash \underset{\underline{m}}{\wedge}_y \neg B(y, \underline{n}) \qquad \text{por (11.16)} \end{aligned}$$

Unificando:
$$\begin{aligned} n \in \widetilde{M} &\longrightarrow \vdash A(\underline{m}, \underline{n}) \wedge \underset{\underline{m}}{\wedge} y \neg B(y, n) \\ &\longrightarrow \vdash \vee_x \ . \ A(x, \underline{n}) \wedge \underset{x}{\wedge}_y \ \neg B(y, \underline{n}). \end{aligned}$$

La implicación que aún falta

$$n \notin \widetilde{M} \longrightarrow \vdash \neg \vee_x \ . \ A(x, \underline{n}) \wedge \underset{x}{\wedge}_y \ \neg B(y, \underline{n})$$

se sigue de $n \notin \widetilde{M} \longrightarrow \vdash \wedge_x \ . \ \neg A(x, \underline{n}) \wedge \underset{x}{\vee}_y \ B(y, \underline{n})$ cuya prueba puede discurrir como sigue:

$$\begin{aligned} n \notin M &\longrightarrow B(l, n) \qquad \text{para un } l \\ &\longrightarrow \vdash B(\underline{l}, \underline{n}) \end{aligned}$$

por tanto
$$\underline{l} \leq x < \underline{l} \leq x \wedge B(\underline{l}, \underline{n})$$
$$\underline{l} \leq x < \vee_y \ . \ y \leq x \wedge B(y, \underline{n})$$
es decir (1)
$$\underline{l} \leq x < \underset{x}{\vee}_y \ B(y, \underline{n})$$

Por lo demás, vale
$$\begin{aligned} n \notin \widetilde{M} &\longrightarrow \neg A(m, n) \qquad \text{para todo } m \\ &\longrightarrow \vdash \underset{\underline{l}}{\wedge}_x \ \neg A(x, \underline{n}) \quad \text{por (11.16)} \end{aligned}$$

por tanto (2) $x \leq \underline{l} < \neg A(x, \underline{n})$

(1) y (2) dan juntamente con (11.19):

$$\vdash \neg A(x, \underline{n}) \vee \underset{x}{\vee}_y \ B(y, \underline{n})$$

De este modo queda probado el teorema 11.2, es decir, la representabilidad fiel para la negación de las relaciones decidibles.

La representabilidad fiel para la negación de las relaciones decidibles en ciertos formalismos completos es asimismo característica de estas relaciones: para toda relación R representable de manera fiel para la negación en un formalismo completo, tanto R como el complemento de R son enumerables.

Para las relaciones numerables (no decidibles) podemos, pues, probar, a lo sumo, la representabilidad en los formalismos completos. Esta vale de hecho. Ahora bien, la prueba no sólo utiliza la consistencia de los formalismos, sino que presupone un conocimiento exacto de los semiformalismos aritméticos. Por otra parte, puede prescindir de (11.19), de tal modo que el axioma de Robinson podría ser sustituido por 11.18).

Teorema 11.3. Toda relación enumerable es representable en el formalismo de Robinson.

Prueba (para conjuntos): Sea

$$n \in \widetilde{M} \longleftrightarrow \vee_m \ A(m, n)$$

la expresión aritmética normal de un conjunto enumerable $\widetilde{M}$ con una fórmula restringida $A(x, y)$. Afirmamos

$$n \in \widetilde{M} \longleftrightarrow \vdash \vee_x \ A(x, \underline{n})$$

La dirección $\longrightarrow$ es trivial: De $n \in \widetilde{M}$ se sigue $A(m, n)$ para un m, y, por tanto, $\vdash A(\underline{m}, \underline{n})$, de donde se sigue $\vdash \vee_x \ A(x, \underline{n})$.

Para la prueba de la recíproca vamos a considerar junto al formalismo de Robinson (o cualquiera de sus extensiones ω-consistentes) el semiformalismo aritmético, semiformalismo que ampliamos mediante una nueva fórmula primitiva $P\,x\,y$. Para los nuevos enunciados primitivos establecemos las definiciones:

$$Pmn \quad \text{verdadero} \quad \leftrightharpoons A\,(m, n)$$
$$Pmn \quad \text{falso} \quad \leftrightharpoons \neg\, A\,(m, n)$$

Dado que toda fórmula derivable en el formalismo de Robinson es asimismo derivable en el semiformalismo (y aquí es, precisamente, donde radica la prueba misma de la consistencia), en un semiformalismo ampliado será derivable:

$$A\,(x, y) < Pxy$$

Como para todo m, n para el que Pmn es verdadero, esto es una implicación básica y para todo m, n para el que Pmn es falso, vale $\neg\, A\,(m, n)$, la fórmula $\neg\, A\,(\underline{m}, \underline{n})$ es, en consecuencia, derivable en el formalismo de Robinson, y $A\,(\underline{m}, \underline{n}) < \Lambda$ lo es en el semiformalismo. Cabe utilizar, por último, la inducción infinita.

Se sigue la derivabilidad de

$$\forall_x\, A\,(x, y) < \forall_x\, Pxy$$

La hipótesis de que $\forall_x\, A\,(x, \underline{n})$ resulta derivable en el formalismo de Robinson da la derivabilidad de

$$\forall < \forall_x\, A\,(x, \underline{n})$$

en el semiformalismo y con ello la derivabilidad de

$$\forall < \forall_x\, Px\,\underline{n}$$

en el semiformalismo. De aquí puede inferirse fácilmente que uno de los enunciados Pmn ha de ser verdadero. Como premisa en una derivación de $\forall < \forall_x\, Px\underline{n}$ sólo figura, en efecto,

$$\forall < P\underline{m}_1\underline{n} \vee \forall_x\, Px\underline{n}$$

Si esto no es todavía una implicación básica, es decir, si Pm_1n es falso, resultarán necesarias otras premisas

$$\forall < P\underline{m}_1\underline{n} \vee P\underline{m}_2\underline{n} \vee \forall_x\, Px\,n$$
$$\forall < P\underline{m}_1\underline{n} \vee P\underline{m}_2\underline{n} \vee P\underline{m}_3\underline{n} \vee \forall_x\, Px\underline{n}$$
$$\cdots$$

Al cabo de un número finito de pasos deberá haberse alcanzado una implicación básica, es decir, tendrá que presentarse un enunciado primitivo Pmn verdadero. Hay, pues, un m con $A\,(m, n)$; o sea: $n \in \widetilde{M}$.

A propósito de este teorema hay que subrayar que las siguientes reflexiones no llevan a una prueba de $\vdash \forall_x\, A\,(x, \underline{n}) \longrightarrow n \in \widetilde{M}$. De $\vdash \forall_x\, A\,(x, \underline{n})$ se pasa a $\vdash \neg \wedge_x \neg\, A\,(x, \underline{n})$ utilizando acto seguido la metaimplicación de la ω-consistencia

$$\vdash \neg\, A\,(\underline{m}, \underline{n}) \text{ para todo } m \longrightarrow \nvdash \neg \wedge_x \neg\, A\,(x, \underline{n})$$

para pasar de la negación de la conclusión a

$$\nvdash \neg\, A\,(\underline{m}, \underline{n}) \quad \text{para un } m$$

Esta última deducción sólo es válida en la lógica clásica. De ahí que únicamente proporcione la «ficción» de la existencia de un m con $A\,(m, n)$. Desde un punto de vista constructivo únicamente se tiene $\neg \wedge_m \neg\, A\,(m, n)$ y sólo el proceso de la prueba de la consistencia proporciona, como acabamos de ver, $\forall_m\, A\,(m, n)$.

§ 12. Indecibilidad e incompletitud

Con el teorema 11.2 hemos llegado a la meta propuesta en el § 9, es decir, a la representabilidad de todas las relaciones decidibles en el formalismo de Peano e incluso en el de Robinson. En la prueba de la indecibilidad que efectuamos partíamos de la hipótesis previa de la calculabilidad de la función diagonal d —definida por

$$d\,\imath\,m = n \longleftrightarrow A_m\,(\underline{m}) \equiv A_n$$

donde Am, An son fórmulas cuyos números gödelianos son m, n. A la vista de la numeración gödeliana utilizada, esta calculabilidad no deja de ser trivial, desde luego. La sustitución $\Sigma\,\xi\,\underline{m}\,A\,B$, es decir, $\xi/\underline{m}\,A \equiv B$ es, en efecto, una relación enumerable (e incluso decidible). Así obtenemos el

Teorema 12.1. El formalismo de Robinson es indecidible, es decir, que el conjunto de sus fórmulas derivables no es decidible.

Como el conjunto de las fórmulas derivables de un formalismo completo es siempre enumerable, en dicho conjunto podemos ver un ejemplo de conjunto enumerable aunque no decidible. El conjunto de las fórmulas no derivables es, por el contrario, un ejemplo de conjunto no enumerable.

La prueba del teorema 12.1 llevada a cabo en los §§ 9-11 permite reforzar dicho teorema de modos diversos. Antes de entrar en ello queremos indicar de pasada que la inferencia por diagonal que nos condujo al teorema 12.1 procura asimismo sin el menor problema ejemplos de conjuntos no expresables aritméticamente. Así, por ejemplo, $\in_m \neg A_m\,(\underline{m})$ es decir, el conjunto de los m para los que la fórmula $A\,(\underline{m})$ no es válida (en aritmética constructiva), es uno de tales. De $\neg A_m\,(\underline{m}) \leftrightarrow A_l\,(\underline{m})$ para todo m se deriva, en efecto, una contradicción.

Como la función diagonal d es, en tanto que función calculable, aritméticamente expresable, tampoco $\in_m A_m$, es decir, el conjunto de las fórmulas constructivamente «verdaderas» del formalismo de Peano, es aritméticamente expresable: si lo fuera, también $\in_m \neg A_m$ sería aritméticamente expresable y, en consecuencia, también $\in_m \neg A_m\,(\underline{m})$ en virtud de

$$\neg A_m\,(\underline{m}) \longleftrightarrow \vee_n \,.\, d\,1\,m = n \wedge \neg A_n\,.$$

Pero volvamos a los formalismos. La prueba del teorema 12.1 efectuada en los §§ 9.11 en lugar del formalismo de Peano se servía del de Robinson y de éste sólo tomaba lo siguiente:

1) $\mathfrak{E}$ es consistente
2) Para toda relación decidible $\widetilde{R}$, $\mathfrak{E}$ contiene una fórmula $A\,(x_1, \ldots, x_r)$ con

$$n_1, \ldots, n_r \in \widetilde{R} \longrightarrow \vdash A\,(\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r)$$
$$n_1, \ldots, n_r \notin \widetilde{R} \longrightarrow \vdash \neg A\,(\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_r)$$

De un formalismo aritmético $\mathfrak{E}$ exigiremos, de manera general, lo siguiente:

a) Las fórmulas de $\mathfrak{E}$ vienen compuestas a base de ciertas constantes, fórmulas primitivas y términos primitivos con la ayuda de partículas lógicas, incluida la igualdad $=$.
b) Todo número n guarda una correspondencia biunívoca con un término constante $\underline{n}$.
c) Existe una numeración gödeliana de las fórmulas de $\mathfrak{E}$, tal que la función diagonal d es calculable.
d) Algunas fórmulas de $\mathfrak{E}$ vienen caracterizadas como «derivables» ($\vdash$). La clase de las fórmulas derivables es cerrada respecto de las implicaciones lógicas clásicas.

Teorema 12.2. Todo formalismo aritmético consistente, en el que toda relación decidible es representable de manera fiel para la negación, es indecidible.

En este teorema los formalismos aritméticos no necesitan ser formalismos completos. El teorema 12.2 resulta también aplicable, por ejemplo, a los semiformalismos aritméticos. La condición (*d*) también queda satisfecha en este caso. Lo que se exige de la lógica clásica es, por lo demás, bien poca cosa: basta con que figure una negación. En las generalizaciones del teorema 12.1, que de este modo resultan posibles, no vale la pena detenerse.

En el teorema 12.2 la condición de la indecibilidad tiene la propiedad de quedar satisfecha incluso en el caso de que la clase de las fórmulas derivables sea arbitrariamente extendida —por inclusión, por ejemplo, de nuevos «axiomas»—, siempre que se mantenga la consistencia, desde luego. Porque una fórmula derivable antes de la extensión del número de axiomas sigue siendo derivable después de dicha extensión. El conjunto de las constantes de los relatores y de los functores puede ser asimismo aumentado. De existir antes de tal extensión una fórmula representable de manera fiel para la negación para toda relación decidible, dicha fórmula seguirá existiendo después de la extensión.

Teorema 12.3. El formalismo de Robinson es esencialmente indecidible, es decir, que cada una de sus extensiones consistentes es indecidible.

Definición 12.1. Si $\mathfrak{E}_1$ y $\mathfrak{E}_2$ son formalismos aritméticos, se dice que $\mathfrak{E}_2$ es una extensión de $\mathfrak{E}_1$ si

1) toda expresión (esto es, toda fórmula y todo término) de $\mathfrak{E}_1$ es una expresión de $\mathfrak{E}_2$,

2) y si toda fórmula derivable en $\mathfrak{E}_1$ lo es asimismo en $\mathfrak{E}_2$.

$\mathfrak{E}_1$ recibe así el nombre de subformalismo de $\mathfrak{E}_2$.

Si $\mathfrak{E}_1$ y $\mathfrak{E}_2$ poseen idénticas expresiones, se dice que $\mathfrak{E}_2$, es una extensión de ámbito de expresión equivalente al de $\mathfrak{E}_1$; y $\mathfrak{E}_1$ un subformalismo del mismo ámbito de expresión que $\mathfrak{E}_2$.

Si $\mathfrak{E}_2$ es una extensión (de ámbito de expresión eventualmente desigual) de $\mathfrak{E}_1$ y toda fórmula de $\mathfrak{E}_1$ que es derivable en $\mathfrak{E}_2$ es derivable ya en $\mathfrak{E}_1$, entonces se dice que $\mathfrak{E}_2$ es una ampliación conservante de $\mathfrak{E}_1$.

Si $\mathfrak{U}_1$ o $\mathfrak{U}_2$ designan el conjunto de expresiones de $\mathfrak{E}_1$ o $\mathfrak{E}_2$ respectivamente, y $\vdash_1$ o $\vdash_2$ designan respectivamente la derivabilidad en $\mathfrak{E}_1$ o $\mathfrak{E}_2$, de acuerdo con la definición 12.1, $\mathfrak{E}_2$ es una extensión de $\mathfrak{E}_1$ caracterizada por:

(1) $\mathfrak{U}_1 \subseteq \mathfrak{U}_2$
(2) $\vdash_1 A \longrightarrow \vdash_2 A$ para todo $A \in \mathfrak{U}_1$

La extensión es de idéntico ámbito de expresión si en vez de (1) vale:

(1′) $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2$

y es conservante si en vez de (2) vale

(2′) $\vdash_1 A \longleftrightarrow \vdash_2 A$ para todo $A \in \mathfrak{U}_1$

Una extensión $\mathfrak{E}_2$ de $\mathfrak{E}_1$ de igual ámbito de expresión y conservante, es una extensión impropia de $\mathfrak{E}_1$. De $\mathfrak{E}_1$ sólo puede distinguirse por la axiomatización eventualmente diferente: la clase de las fórmulas derivables puede ser siempre definida, dando, en primer lugar, un conjunto de axiomas y considerando, acto seguido, que todas las implicaciones lógicas clásicas de los axiomas son válidas. Los formalismos que poseen una extensión impropia común, es decir, que tienen iguales expresiones y las mismas

fórmulas derivables (pero axiomas diferentes), reciben el nombre de equivalentes.

Definición 12.2. Si para un formalismo $\mathfrak{E}$ hay un formalismo equivalente con un conjunto de axiomas finito o decidible, se dice que $\mathfrak{E}$ es axiomatizable de manera finita o decidible.

Definición 12.3. Una extensión (eventualmente de ámbito de expresión no equivalente), de $\mathfrak{E}$, cuyo conjunto de axiomas surge por adición de un número finito de fórmulas al conjunto de axiomas de $\mathfrak{E}$, recibe el nombre de extensión finita de $\mathfrak{E}$.

Si se tiene un formalismo indecidible, aunque no esencialmente indecidible, solamente se podrá inferir de manera general la indecibilidad de una extensión si dicha extensión es conservante. El procedimiento decisorio para una ampliación conservante proporciona inmediatamente un procedimiento decisorio para el subformalismo.

Teorema 12.4. Si un formalismo es indecidible, cada una de sus extensiones conservantes lo es también.

Se puede inferir la indecibilidad de un subformalismo, por el contrario, en el caso de una extensión finita y de igual ámbito de expresión.

Teorema 12.5. Si una extensión finita y de igual ámbito de expresión de un formalismo $\mathfrak{E}$ es indecidible, también $\mathfrak{E}$ es indecidible.

Prueba: Sea $\mathfrak{E}'$ una extensión —de igual ámbito de expresión al de $\mathfrak{E}$ —resultante de añadir $A_1, \ldots, A_n$ a los axiomas de $\mathfrak{E}$. En virtud del teorema de deducción para una proposición A vale $\vdash A$ en $\mathfrak{E}'$ si y sólo si vale $\vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow A$ en $\mathfrak{E}$. De modo, pues, que un procedimiento decisorio para $\mathfrak{E}$ procura asimismo un procedimiento decisorio para $\mathfrak{E}'$.

De la indecibilidad del formalismo de Robinson se desprende, abandonando su número finito de axiomas y en virtud del teo-

rema 12.5, la indecibilidad de un formalismo obtenida, p. ej., a partir del cálculo cuantificacional (incluidos los axiomas de igualdad) por restricción a las expresiones del formalismo de Peano. Como los axiomas de igualdad

$$x = x$$
$$x = y \wedge A(x) \rightarrow A(y)$$

pueden ser sustituidos por un número finito de axiomas, en la medida en que no se exige el esquema sino para fórmulas primitivas $A(x)$ exclusivamente

$$x = x$$
$$x = z \wedge y = z \rightarrow x = y$$
$$x = y \rightarrow x' = y'$$
$$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$
$$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \rightarrow x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$$

por este camino se obtiene igualmente la indecidibilidad del cálculo cuantificacional sin axiomas de igualdad, comenzando por acudir, también en este caso, a una restricción a las expresiones del formalismo de Peano. La indecibilidad del cálculo cuantificacional completo con fórmulas primitivas discrecionales (CHURCH, 1936) se debe, pues, a no ser éste, evidentemente, sino una ampliación conservante de todo cálculo cuantificacional restringido.

En el capítulo siguiente nos ocuparemos de las aplicaciones de los teoremas 12.3-12.5 al problema de la decibilidad de las teorías axiomáticas presentes en la matemática moderna. Aquí vamos a considerar únicamente algunas consecuencias del teorema 12.3 para la aritmética, consecuencias concernientes a la incompletitud de los formalismos aritméticos completos.

Definición 12.4. Un formalismo (consistente) es completo si para cada uno de sus enunciados A vale bien $\vdash A$, bien $\vdash \neg A$.

Esta definición sólo tiene sentido si se exige que A sea un enunciado (es decir, que no ocurra en él ninguna variable libre).

De lo contrario, la incompletitud sería trivial. Así, p. ej., en las formalizaciones consistentes de la aritmética no valen ni $\vdash x = y$ ni $\vdash \neg x = y$.

Entre la completitud y la decibilidad hay una relación muy sencilla:

Teorema 12.6. Todo formalismo completo es decidible[1].

Prueba: El conjunto de los enunciados A de un formalismo completo, para el que vale $\vdash A$, es enumerable. Esto no es, en realidad, otra cosa que la definición de «formalismo completo». De ahí que el conjunto de los enunciados para los que vale $\vdash \neg A$, sea asimismo enumerable. También es decidible si un enunciado derivable B tiene la forma $\neg A$ (así como el «cálculo» de A a partir de B por abandono de $\neg$). Hablar, por otra parte, de la completitud de un formalismo equivale a decir que el conjunto complementario de los enunciados derivables (en el seno del conjunto de todos los enunciados) es, precisamente, el conjunto de enunciados A para el que vale $\vdash \neg A$. De manera, pues, que el conjunto de los enunciados derivables de un formalismo completo [entre cuyas propiedades (metateóricas) figura la de la completitud, T] es decidible. El conjunto de las fórmulas derivables es, en consecuencia, asimismo decidible —de manera trivial—, ya que una fórmula $A(x_1, \ldots, x_n)$ con $x_1, \ldots, x_n$ como únicas variables, es derivable si y sólo si el enunciado $\wedge x_1, \ldots, x_n\ A(x_1, \ldots, x_n)$ es derivable.

La recíproca del teorema 12.6 no es válida, como, p. ej., muestra el ejemplo del formalismo que como términos sólo tiene las constantes primitivas $1, \ldots, n$ y como único axioma $\wedge_x . x = 1 \vee \ldots \vee x = n$. Este formalismo no es completo, ya que, p. ej., para $n > 1$ no son derivables ni $\wedge_{x,y}\ x = y$ ni $\neg \wedge_{x,y}\ x = y$. La decidibilidad de este formalismo resulta inmediatamente de que todos los cuantificadores pueden ser eliminados en virtud de:

---

[1] La traducción exacta de este teorema sería: «Todo formalismo completo completo (*vollständiger Vollformalismus*) es decidible». Recordando la distinción establecida por Lorenzen entre formalismo completo y semiformalismo, el lector deberá entender nuestra traducción simplificada del teorema 12.6 en el sentido de: «Todo formalismo completo entre cuyas propiedades (metateóricas) figura la de la completitud es decidible». *(N. del T.)*

$$\wedge_x A(x) \longleftrightarrow A(1) \wedge \ldots \wedge A(n)$$
$$\vee_x A(x) \longleftrightarrow A(1) \vee \ldots \vee A(n)$$

De acuerdo con los teoremas 12.3 y 12.6, entre las propiedades del formalismo de Peano no figura la completitud. Aunque, desde luego, no es un «semiformalismo», sino un «formalismo completo»: no sólo tiene, en efecto, un número finito de axiomas, sino que el conjunto de sus axiomas es decidible y, además, elementalmente decidible.

He aquí cómo podemos formular este resultado:

Teorema 12.7. El formalismo de Peano es esencialmente incompleto; o sea, que toda extensión consistente enteramente formal es incompleta.

Para determinar la incompletitud de otros formalismos puede hacerse uso del:

Teorema 12.8. Si un formalismo es incompleto, todo subformalismo de igual ámbito de expresión y toda extensión conservante lo son también.

Nos hemos servido en este punto (tácitamente) de la incompletitud como negación de la completitud en el sentido de la definición 12.4. La incompletitud no afirma, pues, la existencia de un enunciado A, para el que no valen $\vdash A$ ni $\vdash \neg A$.

Definición 12.5. Se dice que un formalismo es efectivamente incompleto cuando para uno de sus enunciados A no valen $\vdash A$ ni $\vdash \neg A$.

Es evidente que el teorema 12.8 es válido también para la incompletitud efectiva.

Con el fin de mostrar la incompletitud efectiva del formalismo de Peano, p. ej., vamos a recapitular algunos de los pasos de la prueba precedente. Comenzamos con la consideración del conjunto de los números gödelianos para los que vale $\vdash A_n(\underline{n})$. A_n es aquí la fórmula cuyo número de Gödel es n y $A_n(\underline{n})$ resulta por sustitución de la variable ξ por $\underline{n}$ en A_n.

Este conjunto $\in_n \vdash A_n(\underline{n})$ es enumerable. Existe, pues, una expresión aritmética normal.

(1) $\vdash A_n(\underline{n}) \longleftrightarrow \vee_m B(m, n)$ para todos los números

de Gödel n con una fórmula restringida $B(x, y)$, que puede autorepresentarse de manera fiel para la negación:

(2) $B(m, n) \longrightarrow \vdash B(\underline{m}, \underline{n})$

(3) $\neg B(m, n) \longrightarrow \vdash \neg B(\underline{m}, \underline{n})$

De (1) y (2) se sigue

(4) $\vdash A_n(\underline{n}) \longrightarrow \vdash \vee_x B(x, \underline{n})$

Sabemos, por el teorema 11.3, qué (4) es válido también con $\longleftarrow$ en lugar de $\longrightarrow$; no obstante, no necesitamos aquí este teorema, que se apoya sobre el semiformalismo aritmético.

De todos modos, el conjunto $\in_n \vdash A_n(\underline{n})$ no es representable de manera fiel para la negación por la fórmula $\vee_x B(x, y)$. En virtud de la consistencia del formalismo y de (4) vale

(5) $\vdash \neg \vee_x B(x, \underline{n}) \longrightarrow \nvdash \vee_x B(x, \underline{n}) \longrightarrow \nvdash A_n(\underline{n})$

pero $\nvdash A_n(\underline{n}) \longrightarrow \vdash \neg \vee_x B(x, \underline{n})$

no vale para todo n. Un número g, para el que

(6) $\nvdash A_g(\underline{g})$

y (7) $\nvdash \neg \vee_x B(x, \underline{g})$

valen, es, p. ej., el número de Gödel de la fórmula $\neg \vee_x B(x, \xi)$.

Para este número g (6) no es, desde luego, sino otra manera de escribir (7), y (7) vale porque en virtud de (5) de $\vdash \neg \vee_x B(x, \underline{g})$ se sigue inmediatamente $\nvdash A(\underline{g})$. (Aquí se utiliza la implicación de la lógica constructiva $a \longrightarrow \neg a < \neg a$.)

De (6) y (1) se sigue, por otra parte, $\neg \vee_m B(m, g)$, o sea $\neg B(m, g)$ para todo m y de ahí que por (3)

(8) $\vdash \neg B(\underline{m}, \underline{g})$ para todo m

De (8) se sigue, en fin, en virtud de la ω-consistencia del formalismo $\nvdash \neg \bigwedge_x \neg B(x, \underline{g})$ es decir,

(9) $\nvdash \bigvee_x B(x, \underline{g})$

De acuerdo con (7) y (9), $\bigvee_x B(x, \underline{g})$ es un enunciado que prueba la incompletitud efectiva.

Si se sigue la prueba únicamente hasta (8), como resultado se obtiene la ω-consistencia efectiva: existe (de manera efectiva) una fórmula $C(x)$ (a saber: $\neg B(x, \underline{g})$), para la que $\vdash C(\underline{m})$ vale, efectivamente, para todo m, pero —por (7)— no vale $\vdash \bigwedge_x C(x)$.

Teorema 12.9. El formalismo de Robinson es de manera esencial efectivamente ω-incompleto, es decir, toda extensión enteramente formal y consistente es efectivamente ω-incompleta.

El paso de (8) a (9) da lugar, de manera general, al:

Teorema 12.10. Todo formalismo ω-consistente y (efectivamente) ω-incompleto es (efectivamente) incompleto.

Prueba: Si $\vdash C(\underline{m})$ vale para todo m, por la ω-consistencia no vale $\vdash \neg \bigwedge_x C(x)$. De manera, pues, que no valiendo tampoco $\vdash \bigwedge_x C(x)$, la fórmula $\bigwedge_x C(x)$ prueba la incompletitud efectiva.

Esta vía directa de prueba de la incompletitud —sin dar un rodeo a través del concepto general de la decibilidad— es la vía misma de GÖDEL, 1931, una vía a la que se debe el impulso a las ulteriores investigaciones sobre la indecibilidad. En este trabajo Gödel añadió un «notable resultado» a la prueba de (6) y (7), un resultado concerniente a la inderivabilidad de un enunciado que expresa la consistencia del formalismo completo estudiado, del formalismo de Peano, p. ej. Como ya hemos probado la consistencia, la inderivabilidad de un enunciado de este tipo en ciertos formalismos no es relevante para el problema de la consistencia. Ahora bien, en el año 1931 la consistencia aún no había sido probada (la prueba de GENTZEN no se publicó hasta el año 1936), de tal modo que el resultado de Gödel jugó un papel

importante. Pero sigue siendo importante, de todos modos, para explicar el uso de los semiformalismos en la prueba de la consistencia. Podría en principio intentarse —y tal era también la intención de HILBERT— proceder como sigue: se da una expresión aritmética para la inderivabilidad, la propia fórmula $\neg \bigvee_x B(x, y)$ arriba aducida sirve para ello. Para esta fórmula vale, en efecto,

$$\nvdash A_n(\underline{n}) \longleftrightarrow \neg \bigvee_m B(m, n)$$

Siendo f el número de Gödel de la fórmula $\bigwedge$, tenemos que $A_f \equiv \bigwedge$, y, por tanto, también $A_f(f) \equiv \bigwedge$, valiendo, en consecuencia, para el enunciado de la consistencia $\nvdash \bigwedge$:

$$\nvdash \bigwedge \longleftrightarrow \neg \bigvee_m B(m, f)$$

Podría, pues, intentarse la búsqueda de una prueba de la consistencia probando $\vdash \neg \bigvee_x B(x, \underline{f})$, intentándose asimismo llevarla a cabo, eventualmente, sin hacer uso de otra lógica que de la efectiva.

No obstante, gracias a GÖDEL puede hoy mostrarse que —en determinadas condiciones— la fórmula $\neg \bigvee_x B(x, \underline{f})$ no es derivable en el formalismo (teorema gödeliano de inderivabilidad).

Consideremos en este sentido la deducción que nos ha llevado a (6). Hemos obtenido (6) indirectamente, ya que en virtud de (4) la hipótesis $\vdash A_g(\underline{g})$ permite derivar una contradicción, es decir $\vdash A_f(\underline{f})$. El paso de $\vdash A_g(\underline{g})$ a $\vdash A_f(\underline{f})$ sólo puede hacerse por vía constructiva. Cabe aducir un procedimiento para pasar de una derivación hipotética de $A_g(\underline{g})$ a una derivación de $A_f(\underline{f})$. Para ello hay que volver otra vez a los §§ 9-11. En ellos se indica la vía para encontrar una fórmula aritmética restringida $B(x, y)$, tal que de la derivación de una fórmula $A_n(\underline{n})$ pueda obtenerse siempre un número m y una derivación de $B(\underline{m}, \underline{n})$, y viceversa. Sea de nuevo g el número de Gödel de $\neg \bigvee_x B(x, \xi)$ y k un número obtenido de la manera arriba citada a partir de una (hipotética) derivación de $A_g(\underline{g})$. Puede, pues, obtenerse una derivación de $B(\underline{k}, \underline{g})$ y de ella —de acuerdo con las reglas lógicas— una derivación de $\bigvee_x B(x, \underline{g})$. Juntamente con la (hipotética) derivación de $A_g(\underline{g})$ es decir, de $\neg \bigvee_x B(x, \underline{g})$ se obtiene una derivación de $\bigwedge$, es decir, de $A_f(\underline{f})$. La consistencia del formalismo

revela en este punto la falsedad de la hipótesis: $\neg \vee_x B(x, \underline{g})$ no es derivable. No obstante, puede encontrarse hipotéticamente un número l y una derivación de $B(\underline{l}, \underline{f})$. Aritmetizando esta prescripción metamatemática de cálculo para l (partiendo de k), se obtiene nuevamente en virtud de los §§ 9-11 un término aritmético $t(x)$ con $t(k) = l$ tal que $\vdash B(\underline{t(k)}, \underline{f})$ valga si $\vdash B(\underline{k}, \underline{g})$ vale. Formulado de otra manera: para todo k vale

$$(10) \qquad \vdash B(\underline{k}, \underline{g}) \longrightarrow \vdash B(\underline{t(k)}, \underline{f})$$

Como $B(x, y)$ es una fórmula restringida se sigue

$$(11) \qquad \vdash B(\underline{k}, \underline{g}) \rightarrow B(\underline{t(k)}, \underline{f}) \quad \text{para todo } k.$$

Para la marcha subsiguiente de la prueba de GÖDEL no resulta únicamente necesario que valga (11) en el formalismo considerado, sino también

$$(12) \qquad \vdash B(x, \underline{g}) \rightarrow B(t(x,) \underline{f})$$

con una variable x.

Dado que un formalismo completo es ω-incompleto, (12) impone una nueva condición al formalismo: la llamada «condición de derivabilidad de BERNAYS». En HILBERT-BERNAYS II, especialmente en el § 5.2, se prueba, en primer lugar, que esta condición es satisfecha, para una fórmula apropiada $B(x, y)$, en el formalismo de Peano (y en todas sus extensiones).

Supongamos que (12) resulte satisfecha; de ahí:

$$\vdash B(x, \underline{g}) \rightarrow \vee_y B(y, \underline{f})$$
$$\vdash \vee_x B(x, \underline{g}) \rightarrow \vee_y B(y, \underline{f})$$
$$\vdash \neg \vee_y B(y, \underline{f}) \rightarrow \neg \vee_x B(x, \underline{g})$$

Y por la inderivabilidad de $\neg \vee_x B(x, \underline{g})$ se sigue, de hecho:

$$(13) \qquad \nvdash \neg \vee_y B(y, \underline{f})$$

Con lo que llegamos a la siguiente formulación del teorema de inderivabilidad de GÖDEL:

En toda extensión consistente del formalismo de Robinson que satisfaga la condición de derivabilidad de BERNAYS (según HILBERT-BERNAYS: en toda extensión consistente del formalismo de Peano) el enunciado formalizado de la consistencia de la extensión no es derivable.

Este teorema, que pudo ser interpretado en un principio —por emplear la expresión de BERNAYS— como un «fracaso» de la metamatemática, ha dado lugar a numerosas especulaciones. Lo más original es, sin duda, lo que a este respecto parece haber dicho el matemático A. WEIL: «Dios existe porque la matemática es consistente, y el demonio, porque no nos es posible probar tal consistencia».

Desde un punto de vista crítico, el teorema de inderivabilidad de GÖDEL nada dice, desde luego, acerca de Dios, del mundo ni de las facultades humanas de conocimiento: no pasa de ser un teorema de la matemática constructiva. La «justificación» de dicha matemática constructiva no es influida por él; su prueba, por el contrario, la presupone. Por lo demás, la «justificación» de la aritmética formalizada es sacudida por las pruebas constructivas de la consistencia. El teorema de inderivabilidad de GÖDEL evidencia la necesidad de imponerse un esfuerzo superior a lo que HILBERT podía sospechar en un principio.

S. FEFERMAN ha observado que, a diferencia del teorema de incompletitud, el de inderivabilidad no es extensional: no permanece invariante al sustituir fórmulas que figuran en él por otras de las que sólo se exige que sean de igual extensión, es decir, que representen igual conjunto.

Pongamos, p. ej.,

$$B^*(x, y) \leftrightharpoons B(x, y) \wedge \neg \vee_z B(z, \underline{f})$$

Tenemos, pues, (en virtud de la consistencia) la validez de

$$B^*(m, n) \longleftrightarrow B(m, n) \quad \text{para todos} \quad m \text{ y } n$$

y, en consecuencia (en virtud del cuantificador restringido $\vee_x z$), también

$$\vdash B^*(\underline{m}, \underline{n}) \longleftrightarrow B(\underline{m}, \underline{n}) \quad \text{para todos} \quad m \text{ y } n$$

La extensión de las fórmulas $B^*(x, y)$ y $B(x, y)$ es, pues, la misma. No obstante (a causa, según parece, del teorema de inderivabilidad), vale

(14) $\quad \vdash \neg \forall_x B^*(x, \underline{f})$

Prueba: De $\quad \vdash \neg B(x, \underline{f}) \vee B(x, \underline{f})$

se sigue $\quad \vdash \neg B(x, \underline{f}) \vee \bigvee_x B(z, \underline{f})$

$\vdash \wedge x \,.\, \neg B(x, \underline{f}) \vee \bigvee_x B(z, \underline{f})$

$\vdash \neg \forall_x .\ B(x, \underline{f}) \wedge \neg \bigvee_x B(z, \underline{f})$

No es fácil, desde luego, decidirse a considerar esto como una derivación de la consistencia formalizada, ya que

$$\vdash B(x, \underline{f}) \longleftrightarrow B^*(x, \underline{f})$$

no vale: de lo contrario se seguiría, contra el teorema de inderivabilidad, $\vdash \neg \forall_x B(x, \underline{f})$. A causa de (14) no cabe trasponer la prueba de (13) a $B^*(x, y)$. De ahí que la condición de derivabilidad de BERNAYS

$$\vdash B^*(x, \underline{g}^*) \longrightarrow B^*(t^*(x), \underline{f})$$

con g^* como número de Gödel de $\neg \forall_x B^*(x, \xi)$ no pueda ser satisfecha para ningún término $t^*(x)$.

IV

DECIBILIDAD DE LAS TEORIAS AXIOMATICAS

§ 13. TEORÍAS AXIOMÁTICAS

La metamatemática de la que nos hemos ocupado hasta este momento trataba de cuestiones surgidas al hilo del programa hilbertiano de formalización de la lógica y de la aritmética. El capítulo II contenía el resultado positivo de GENTZEN de que la consistencia de la lógica clásica formalizada puede ser mostrada constructivamente en su aplicación a la aritmética. La aritmetización gödeliana de los formalismos nos condujo, en el capítulo III, al resultado negativo de que toda formalización completa[1] consistente es incompleta[2]. Hemos probado asimismo el teorema de CHURCH, según el cual el problema de la decisión de HILBERT (decidir sobre la verdad lógica de fórmulas cualesquiera del cálculo de cuantificadores) es insoluble en el siguiente sentido: no hay ningún procedimiento de decisión para la lógica de cuantificadores.

Esta metamatemática hilbertiana ha resultado útil para la investigación crítica de los fundamentos de la aritmética. En lo que concierne a la aritmética, las cuestiones planteadas por HILBERT han sido, en lo esencial, resueltas por los resultados de GENTZEN y GÖDEL. En cuanto al análisis —y, en general, a la teoría de conjuntos—, la situación no es la misma. Existen, sin duda, tentativas de cara a una teoría de conjuntos constructiva, pero la mayoría de los matemáticos no se preocupan demasiado por ello. También existen, desde luego, sistemas de axiomas para la teoría de conjuntos, pero faltando una teoría de conjuntos

---

[1] Formalización «completa» —recordamos al lector— en el sentido de «formalismo pleno», es decir, no «semiformalismo», según la distinción establecida por Lorenzen en páginas anteriores. *(N. del T.)*

[2] Es decir, carente de la propiedad (metateórica) de la completitud. *(N. del T.)*

constructiva reconocida no se dispone de criterio alguno para saber si un sistema de axiomas de éstos es, de hecho, una teoría de conjuntos formalizada o, simplemente, una fantasía.

Estas investigaciones aún no están, por supuesto, clausuradas (cfr. FRAENKEL, BAR-HILLEL, 1958). Los métodos generales de la metamatemática juegan en ellas un papel importante, pero tampoco sirven sino para la investigación crítica de los fundamentos.

Los trabajos de TARSKI han abierto una vía nueva en la que la propia metamatemática incide en los problemas de la matemática moderna. Esta metamatemática de TARSKI tiene como objeto las teorías axiomáticas de la matemática moderna.

Estas teorías axiomáticas no han surgido de una crítica al contenido de la matemática clásica, sino a raíz, por el contrario, del descubrimiento de «identidades estructurales» en el seno de la matemática clásica. Los enteros y los racionales positivos ofrecen, a este respecto, un ejemplo bien sencillo; si observamos la adición de los números enteros k, l, ..., veremos que valen para ella los siguientes enunciados:

$$\bigwedge_{k,l,m} k \dot{+} l + m = k + l \dot{+} m$$
$$\bigwedge_{k,l} k + l = l + k$$
$$\bigwedge_{k,m} \bigvee_{t} k + l = m$$

Si consideramos, por otra parte, los racionales positivos u, v, ..., veremos que para la multiplicación vale, p. ej.:

$$\bigwedge_{u,v,w} u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$$
$$\bigwedge_{u,u} u \cdot v = v \cdot u$$
$$\bigwedge_{u,w} \bigvee_{v} u \cdot v = w$$

Estos sistemas de enunciados tienen la misma forma. Si hubiéramos utilizado en ambos casos las variables x, y, ..., y, asimismo, el signo funcional $\circ$ para la adición de números enteros y el mismo signo $\circ$ para la multiplicación de racionales positivos, habríamos obtenido en los dos casos:

$$(13.1) \qquad \begin{cases} \bigwedge_{x,y,z} x \dot{\circ} y \circ z = x \circ y \dot{\circ} z \\ \bigwedge_{x,y} x \circ y = y \circ x \\ \bigwedge_{x,z} \bigvee_{y} x \circ y = z \end{cases}$$

Dado que con cualquier sistema de enunciados que valga en un dominio cualquiera de la matemática también valen todas las inferencias lógicas de este sistema, valdrá la pena, en el caso de que se encuentren en dominios diversos sistemas de enunciados de igual forma, investigar acerca de las inferencias lógicas de estos sistemas de formas proposicionales, sin referencia a ningún dominio «concreto» de la matemática. Este giro de la matemática concreta hacia la abstracta o axiomática es una de las características más importantes de la matemática moderna.

Dos sistemas de axiomas distintos que implican lógicamente iguales enunciados (para lo que sólo es exigible que se impliquen lógicamente el uno al otro) son equivalentes desde el punto de vista de la matemática axiomática. Es decir, expresan igual «estructura». En el sentido en que utilizamos este término —ya que la palabra «estructura», tan de moda, suele utilizarse de otra manera—, una estructura es expresada por un sistema de axiomas.

Los «portadores» de las estructuras son los conjuntos. Así, por ejemplo, el conjunto de los números enteros es, respecto de su adición, el «portador» de la estructura expresada por (13.1). Un conjunto con un sistema de relaciones y funciones, definidas para este conjunto, puede recibir el nombre de «figura». El conjunto recibe en tal caso el nombre de conjunto básico de la figura.

Para formular más exactamente cuándo es portador de una estructura el conjunto básico de una figura vamos a proceder como sigue. En el sistema de axiomas las fórmulas pueden estar compuestas de ciertas fórmulas primitivas y términos primitivos (eventualmente constantes primitivas). Si a los símbolos primitivos aquí ocurrentes se les asignan ciertas relaciones y funciones (eventualmente elementos) de una figura, de tal modo que entre los primeros y las segundas exista una correspondencia biuní-

voca, se dirá que esta correspondencia establecida es una «interpretación» del sistema de axiomas.

La figura, compuesta por el conjunto básico y las relaciones, funciones y elementos ordenados a los símbolos primitivos —o, más exactamente, la interpretación, es decir, la ordenación misma—, recibe el nombre de «modelo» del sistema de axiomas en el caso de que en esta ordenación o correspondencia establecida todos los axiomas del sistema sean transformados en enunciados verdaderos para la figura, en cuyo caso el conjunto básico es el portador de la estructura expresada por el sistema de axiomas. A este respecto, las variables-objeto de los axiomas han de ser interpretadas como variables para los elementos del conjunto básico de la figura. Los enunciados compuestos con ayuda de las partículas lógicas han de ser interpretados sobre la base de la interpretación operativa de las partículas. Respecto de la lógica clásica, la verdad y falsedad de los enunciados compuestos pueden ser definidas «semánticamente» como en el § 6.

Si dos figuras poseen una misma estructura, si son ambas modelos de un sistema de axiomas, no tienen por qué ser isomorfas, es decir, sus elementos no necesitan estar en correspondencia biunívoca, de tal modo que las relaciones, funciones y elementos que corresponden a los mismos símbolos primitivos resulten intercambiables. En el ejemplo anterior, la figura de los números enteros con su adición y la figura de los racionales positivos con su multiplicación no son isomórficas. Si una figura es modelo de un sistema de axiomas (podemos decir también: de una estructura), toda figura isomórfica proporcionará también, como es natural, un modelo. De las figuras isomórficas decimos que expresan (o representan) el mismo «tipo». Precisamente en este sentido ha introducido CANTOR, con sus tipos de órdenes, el término tipo. Si una figura es el modelo de una estructura, decimos que el tipo de la figura es un «modelo abstracto» de la estructura.

La conexión fundamental entre los modelos de una teoría axiomática y los enunciados válidos en ella (esto es, los enunciados compuestos lógicamente a partir de las fórmulas primitivas de la teoría y que se derivan lógicamente del sistema de axiomas) es evidenciada por el teorema gödeliano de completitud (1930):

Todo enunciado de una teoría axiomática que sea verdadero en todos los modelos del sistema de axiomas (sobre la base de la definición semántica de la verdad) es una consecuencia de los axiomas en el sentido de la lógica clásica.

En lo que sigue no haremos uso de este teorema (cfr. el teorema de finitud en LORENZEN, 1958, § 11): no es un teorema de la metamatemática constructiva, sino que se desprende de un teorema de este tipo mediante aplicación de la lógica clásica. Para los sistemas finitos de axiomas —con utilización de la lógica clásica— se sigue el anterior teorema de:

Si un enunciado de la lógica de cuantificadores no es lógicamente verdadero en el sentido clásico, hay un contramodelo, es decir, una interpretación en la que el enunciado es (semánticamente) falso.

En efecto, si A es la conjunción de un sistema finito de axiomas, y B es verdadero en todos los modelos de A, $A \rightarrow B$ será verdadero (en sentido clásico) en todas las interpretaciones. Si $A \rightarrow B$ no fuera lógicamente verdadero (es decir, si B no fuera una consecuencia lógica de A) habría —con el requisito previo del teorema anteriormente formulado— un contramodelo de $A \rightarrow B$, o sea, que $A \wedge \neg B$ sería verdadero en una interpretación: habría un modelo de A en el que B sería falso.

Con el fin de acceder a un teorema de la matemática constructiva, vamos a endurecer el requisito previo sustituyendo la negación «no lógicamente verdadero» por la existencia efectiva de una contraestragia para la afirmación de la verdad lógica, es decir, de la derivabilidad en el cálculo cuantificacional clásico. En el § 6 probábamos de modo parecido la «completitud» del semiformalismo aritmético en la formulación: «Si hay una contraestrategia para una implicación, entonces ésta es inválida». La prueba del § 6 puede trasponerse casi literalmente al cálculo cuantificacional. En este último desaparecen los términos (salvo las variables), así como la inducción infinita. Como implicaciones básicas quedan sólo:

$$F \wedge \bigwedge < G$$

$$F < \bigvee \vee G$$

y $\quad F \wedge c < c \vee G \quad$ para las fórmulas atómicas c.

Para la defensa de la tesis de la derivabilidad de una implicación I, el proponente P debe construir sucesiones especiales de antecedentes como en el § 6. La construcción debe ser efectuada acto seguido de tal manera que

(1) en una implicación no crítica se escoja como antecedente una premisa de una de las reglas (6.13)-(6.16), (6.17) ó (6.19),
(2) en una implicación crítica se escoja como antecedente el resultante de poner $\wedge_x A(x) \wedge A(\xi_m)$ para todos los miembros $\wedge_x A(x)$ y, asimismo, $\vee_y B(y) \vee B(\xi_n)$ para todos los miembros $\vee_y B(y)$.

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, es aquí la sucesión infinita de todas las variables y m o n, respectivamente, designan el número de implicaciones críticas que se han presentado ya en la sucesión de antecedentes y en las que $\wedge_x A(x)$ o $\vee_y B(y)$, respectivamente, figuran como miembros.

Si contra la estrategia del proponente P, el oponente O dispone de una contraestrategia, ello significará que mediante sus «jugadas» O puede obligar a P a afirmar sucesivamente los miembros de una sucesión de antecedentes de I tal que o bien acabe en una implicación primitiva que no sea una implicación básica o bien sea infinita. En ambos casos cabe construir, no obstante, un contramodelo de I, es decir, una interpretación en la que I no sea válida. Al igual que en la prueba del § 6 basta con establecer que una fórmula primitiva, pongamos una fórmula primitiva diádica $a(x, y)$, debe ser interpretada mediante una relación diádica R entre números naturales que satisfaga las siguientes condiciones:

Si $a(\xi_m, \xi_n)$ figura como antecedente en una implicación de la sucesión de antecedentes, entonces $m, n \in R$.

Si $a(\xi_m, \xi_n)$ figura como consecuente, entonces $m, n \notin R$.

Las reflexiones del § 6 muestran, pues, literalmente que la implicación de partida no es válida en esta interpretación.

Por muy restringido que pueda parecer el teorema clásico de completitud de GÖDEL para la matemática constructiva, la prueba procura, de todos modos, lo suficiente como para intentar dar para todo enunciado B de una teoría axiomática [1]

a) una derivación de B a partir de los axiomas de la teoría, bien
b) un modelo de la teoría en el que B sea falso.

No cabe afirmar, desde luego, que exista al menos una de estas dos posibilidades, pero no pueden presentarse simultáneamente refutaciones constructivas de ambas posibilidades, es decir,

a') una contraestrategia para la afirmación de la derivabilidad de B
b') una «prueba» de que B es verdadera en todo modelo de la teoría (cualquiera que fuera la estructura de la misma).

Todo esto viene contenido de manera constructiva en el teorema de completitud.

En la metamatemática de TARSKI se buscan procedimientos de decisión para las teorías axiomáticas de la matemática moderna, es decir, procedimientos que deciden para todo enunciado de la teoría si es derivable o no a partir de los axiomas.

Como hemos visto en el capítulo III, existen teorías axiomáticas (la aritmética de Robinson, por ejemplo) que no son decidibles, es decir, que son indecidibles incluso de manera esencial. De ello puede deducirse la indecibilidad de no pocas teorías importantes de la matemática abstracta, como, por ejemplo, la de la teoría de anillos, de cuerpos, etc. (cfr. § 14).

Para otras teorías, sin embargo, como la de cuerpos algebraicamente cerrados y la de cuerpos realmente cerrados (cfr. § 15), ha llegado a dar TARSKI, 1948, un procedimiento de decisión.

La decibilidad de una teoría axiomática no significa, naturalmente, que con ella hayan quedado solucionadas todas las cuestiones relacionadas en la matemática moderna con el sistema de axiomas de la teoría. El procedimiento de decisión no va más allá de los enunciados que se derivan de los enunciados primitivos de la teoría y que son compuestos con la sola ayuda de las partículas lógicas.

Antes de entrar en las teorías especiales quede apuntado que el problema de decidir, para cualesquiera teorías axiomáticas, si son decidibles o no, es a su vez indecidible. Como prueba basta considerar las teorías axiomáticas T_A derivadas de la aritmética de Robinson por adición de un enunciado cualquiera A a los axiomas. Como la aritmética de Robinson es esencialmente indecidible, T_A es decidible si y sólo si T_A es inconsistente, es decir, si $\neg A$ es derivable en la aritmética de Robinson. No obstante, la cuestión de la derivabilidad de $\neg A$ es indecidible, de tal manera que también lo es la de la decibilidad de T_A.

§ 14. Teorías axiomáticas indecidibles

Comencemos por la teoría axiomática de los anillos. Son expresiones de esta teoría:

(1) Ciertas variables objetuales para las que utilizaremos como variables (sintácticas) x, y, ...

(2) La constante primitiva 1

(3) Los términos primitivos $(x + y)$ y $(x \cdot y)$

(4) Las fórmulas primitivas $x = y$

Los términos y fórmulas son construidos, como es usual, a partir de las constantes, términos y fórmulas primitivos. Para indicar explícitamente que todos los enunciados de la teoría considerados son fórmulas compuestas a partir de las fórmulas primitivas con la sola ayuda de las partículas lógicas, vamos a dar el nombre de teoría *elemental* de anillos a la teoría axiomática de anillos de la que nos estamos ocupando.

Tomamos como axiomas

$$(14.1)\quad \begin{cases} x + y \dot{+} z = x \dot{+} y + z \\ x + y = y + x \\ \vee_y\, x + y = z \\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \\ z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y \\ 1 \cdot x = x \\ x \cdot 1 = x \end{cases}$$

A excepción del tercer axioma de (14.1), todos estos axiomas son teoremas aritméticos. Son fácilmente derivables, por ejemplo, en la aritmética de Peano. Daremos al modelo del sistema de axiomas (14.1), sin el tercero, el nombre, simplemente, de «semianillo».

Con el fin de poder probar que la teoría elemental de semianillos es indecidible, vamos a modificar la aritmética de Robinson de tal manera que acabe teniendo el mismo ámbito de expresión que aquélla. En la aritmética de Robinson figuran los términos primitivos x', $x + y$ y $x \cdot y$. Como $\vdash x + o' = x'$, puede prescindirse del término x' utilizando la constante 1 en lugar de O'. Por otra parte, puede definirse también inversamente la adición con ayuda de la función sucesora y de la multiplicación. Para todos los números naturales k, l y $m \neq 0$ vale, en efecto,

$$k + l = m \leftrightarrow (k \cdot m)' \cdot (l \cdot m)' = ((k \cdot l)' \,.\, (m \cdot m))'$$

como puede verificarse inmediatamente mediante cálculo.

Ahora bien, como es obvio, la reducción a la unidad, a la adición y a la multiplicación lleva a un sistema de axiomas más sencillo. Podría incluso reducirse asimismo la multiplicación a la elevación al cuadrado sobre la base de

$$k \cdot l = m \leftrightarrow (k + l)^2 = k^2 + m + m + l^2$$

Todo esto no supone, de todos modos, ventaja alguna. De ahí que escojamos los siguientes axiomas

$$(14.2)\quad \begin{cases} x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \\ \neg\, x + 1 = 1 \\ x = 1 \vee \vee_y\, (x = y + 1) \\ x \dot{+} y + 1 = x + y \dot{+} 1 \\ 1 \cdot x = x \\ (x + 1) \cdot y = (x \cdot y) + y \end{cases}$$

Este sistema de axiomas consta de teoremas de la aritmética de los enteros positivos 1, 2, ..., no de los números naturales 0, 1, 2, ...

La diferencia respecto de la aritmética de Robinson es, no obstante, nimia. Para la aritmetización efectuada en el § 10 no hubiéramos tenido más que tomar los enteros positivos en lugar de los números naturales y hubiéramos obtenido en el § 11 la representabilidad de todas las relaciones aritméticas en el formalismo modificado —y con ello la esencial indecibilidad de la teoría axiomática (14.2)—. A la indecibilidad de la teoría elemental de semianillos se llega, en consecuencia, del siguiente modo: la extensión de (14.2) mediante los axiomas de semianillos

es consistente (porque la aritmética procura un modelo) y, por tanto, indecidible. La extensión es, al mismo tiempo, una extensión finita de la teoría de semianillos y de idéntico ámbito de expresión, y en virtud del teorema 12.5 ésta última es, a su vez, indecidible.

De acuerdo con el ejemplo de esta prueba cabría obtener la indecibilidad de la teoría elemental de anillos —es decir, de la teoría elemental con el sistema de axiomas (14.1) completo— si se tuviera una teoría esencialmente indecidible con un sistema finito de axiomas que poseyera como modelo el de los números enteros, más exactamente: la figura de los números enteros con el elemento unidad, adición y multiplicación.

No es difícil obtener una teoría de este tipo. El paso esencial consiste en «caracterizar», en el seno de la teoría elemental de los números enteros, el conjunto de los números naturales (o de los números enteros positivos), esto es, aducir una fórmula $N(x)$ de la teoría tal que para todo número entero m valga $N(m)$ si y sólo si m es un número natural. Para ello cabría utilizar, por ejemplo, el teorema de FERMAT, según el cual todo número natural es la suma de cuatro cuadrados.

Por otra parte,

$$m \geq 0 \leftrightarrow \vee_{x_1, x_2, x_3, x_4} m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

vale para todo m, siendo utilizadas $x_1, \ldots, x_4$ como variables para los enteros.

Si a ello se añade que

$$m = 0 \leftrightarrow 1 + m = 1$$

se obtiene con

$$m > 0 \leftrightarrow \neg\, m = 0 \wedge m \geq 0$$

una fórmula $P(x)$ que caracteriza los números enteros positivos.

Los enunciados de la teoría elemental de enteros positivos pueden ser «traducidos» así a enunciados de la teoría elemental de los enteros. Ello ocurre añadiendo, en primer lugar, a las expresiones de la teoría elemental de enteros una nueva fórmula

primitiva Πx, interpretable como «$x > 0$». Los axiomas (14.2) son sustituidos acto seguido por la forma «relativizada»:

$$(14.3)\quad \begin{cases} \Pi x \wedge \Pi y \wedge x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \\ \Pi x \rightarrow \neg\, x + 1 = 1 \\ \Pi x \rightarrow x = 1 \vee \vee_y . \Pi y \wedge x = y + 1. \\ \Pi x \wedge \Pi y \rightarrow x \dot{+} y + 1 = x + y \dot{+} 1 \\ \Pi x \rightarrow 1 \cdot x = x \\ \Pi x \wedge \Pi y \rightarrow (x + 1) \cdot y = (x \cdot y) + y \end{cases}$$

El procedimiento sistemático de relativización (concerniente a Π) consiste en la introducción de la condición Πx para todo cuantificador $\wedge_x$, $\vee_x$ (con lo que las variables libres tienen que ser, pues, previamente ligadas mediante cuantificadores universales). De este modo:

$\wedge_x A(x)$ es relativizado en $\underset{\Pi_x}{\wedge_x} A(x)$ es decir, en $\wedge_x \cdot \Pi_x \rightarrow A(x)$.

$\vee_x A(x)$ es relativizado en $\underset{\Pi_x}{\vee_x} A(x)$ es decir, en $\vee_x \cdot \Pi_x \wedge A(x)$.

Añadimos a (14.3)

$$(14.4)\quad \begin{cases} \Pi\, 1 \\ \Pi x \wedge \Pi y \rightarrow \Pi (x + y) \\ \Pi x \wedge \Pi y \rightarrow \Pi (x \cdot y) \end{cases}$$

La nueva teoría (14.3)-(14.4) es, pues, una modificación de la aritmética de Robinson y hubiera podido ser asimismo utilizada en su lugar en el § 11. Toda derivación de un enunciado A (sin Π) a partir de (14.2) procura inmediatamente una derivación del enunciado relativizado A_Π a partir de (14.3)-(14.4). Lo recíproco también vale, como puede verse acto seguido: una derivación de A_Π a partir de (14.3)-(14.4) se convierte en una derivación de A a partir de (14.2) si todas las fórmulas Πt (con

un término cualquiera t) son sustituidas en ella por $\vee$. Mediante esta sustitución se obtienen a partir de los axiomas (14.3) precisamente los axiomas (14.2).

Una vez llegados a este resultado —es decir, a la esencial indecidibilidad de (14.3)-(14.4)— volvemos a la aritmética de los enteros. Para obtener un sistema de axiomas esencialmente indecidible para la misma, «traducimos» la teoría (14.3)-(14.4) a la teoría elemental de anillos, p. ej. (lo en principio importante no son todavía los axiomas, sino solo las expresiones).

Esta traducción ocurre estableciendo una correspondencia entre las fórmulas caracterizadoras $P(x)$ y las fórmulas primitivas Πx, a saber:

$$(14.5) \quad \neg\, 1 + x = 1 \wedge \vee_{x_1, x_2, x_3, x_4}\, x = (x_1 \cdot x_1) + (x_2 \cdot x_2) + (x_3 \cdot x_3) + (x_4 \cdot x_4)$$

En virtud de esta traducción toda fórmula (las restantes fórmulas primitivas $x = y$ y los términos primitivos 1, $x + y$, $x \cdot y$ no cambian en dicha traducción) es transformada en una fórmula de la teoría de anillos. Los axiomas (14.3)-(14.4) no se convierten, de todos modos, en teoremas de la teoría de anillos, pero dan lugar, mediante su traducción, a una extensión consistente (y de idéntico ámbito de expresión) de la teoría de anillos. De ahí que estos axiomas reciban el calificativo de «consistentemente traducibles» a la teoría de anillos.

Todo ello puede ser formulado también del siguiente modo: añadiendo a la teoría de anillos los axiomas (14.3)-(14.4) y como nuevo axioma

$$(14.6) \quad \Pi x \longleftrightarrow P(x)$$

con la fórmula (14.5) como $P(x)$ se obtiene una extensión consistente (aunque, de todos modos, no de idéntico ámbito de expresión) de la teoría de anillos. Los números enteros constituyen un modelo de la extensión, y esto es todo lo que se exige de los axiomas de los anillos. Daremos asimismo a esta extensión de la teoría de anillos mediante (14.6) y los axiomas (14.3)-(14.4) el calificativo de «traducción consistente» de la teoría (14.3)-(14.4) a la teoría de anillos.

Del hecho de la traducibilidad consistente de una teoría finita axiomatizada y esencialmente indecidible a una segunda teoría se sigue inmediatamente la indecibilidad de la segunda teoría. La traducción procura, en efecto, una extensión consistente de la primera teoría; esta extensión es, pues, indecidible. Es asimismo —formulada en idéntico ámbito expresivo— una extensión finita consistente de la segunda teoría, y de su mismo ámbito expresivo, con lo que también ésta es, pues, indecidible.

Por esta vía no se obtiene, de todos modos, la indecibilidad esencial de la segunda teoría. La teoría de anillos, p. ej., no es esencialmente indecidible. En el § 15 veremos extensiones decidibles de la misma.

Extendiendo la teoría de anillos mediante axiomas, de tal manera que los números enteros constituyan un modelo del sistema de axiomas, de acuerdo con la prueba anterior puede afirmarse la subsistencia de la indecibilidad. Se obtiene así, por ejemplo, la indecibilidad de la teoría elemental de anillos conmutativos mediante la adición de

$$(14.7) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

y la de los dominios de integridad añadiendo también

$$(14.8) \quad x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

Si se suprimen los axiomas, la indecibilidad subsiste tanto tiempo como la teoría se mantenga en idéntico ámbito de expresión.

Si, por el contrario, se restringen las expresiones, y se elimina, p. ej., la multiplicación y sólo se toman los tres primeros axiomas, se obtiene la teoría elemental de los grupos conmutativos. La cual es —como mostró W. SZMIELEW, 1955, en un penetrante trabajo— decidible. No obstante, según TARSKI (1953), la teoría de grupos es, a su vez, indecidible.

Los anteriores resultados nada dicen acerca de la teoría elemental de cuerpos, ya que ésta surge por adición de

$$(14.9) \quad \neg\, 1 + x = 1 \rightarrow \vee_y\, x \cdot y = z$$

a la teoría de los anillos conmutativos. Los números enteros no procuran, de todos modos, modelo alguno para (14.9). Para

acceder, no obstante, a la indecibilidad de la teoría elemental de cuerpos puede repetirse el método recién aplicado. Se construye un sistema finito y esencialmente indecidible de axiomas de la aritmética de los números racionales partiendo de la caracterización de los enteros mediante una fórmula elemental de la aritmética de los racionales. J. ROBINSON, 1949, encontró la posibilidad de semejante caracterización. Para ello se utilizan teoremas de la teoría de números relativos a las formas cuadráticas procedentes de la tesis de H. HASSE, 1923, que no podemos exponer aquí. La presencia de teoremas tan profunda y puramente matemáticos en la metamatemática es un signo harto elocuente de la profunda vinculación existente entre la metamatemática de TARSKI y la matemática misma.

Si se dispone de una fórmula $G(x)$ de la aritmética elemental de los números racionales, para la que vale

$$1 \mid x \leftrightarrow G(x)$$

($1 \mid x$, es decir, «1 es divisor de x» o «x es entero»), hay que extender —análogamente a lo precedente— el sistema de axiomas esencialmente indecidible (14.3), (14.4), (14.6) con una nueva fórmula primitiva Γx mediante

$$\Gamma x \leftrightarrow G(x) \tag{14.10}$$

En lugar de la relativización concerniente a Γ del sistema de axiomas —ya relativizado respecto a Π—, basta, evidentemente, con añadir:

$$\Pi x \rightarrow \Gamma x \tag{14.11}$$

Resulta un sistema de axiomas esencialmente indecidible con los números racionales como modelo. Añadiendo, p. ej., los axiomas de los cuerpos, el sistema permanece consistente, siendo todavía indecidible.

La indecibilidad se mantiene también —en virtud de la esencial indecibilidad de (14.3), (14.4), (14.6), (14.10), (14.11)— añadiendo axiomas con nuevos símbolos primitivos, en tanto, desde luego, éstos no permitan como modelo sino los números racionales.

La extensión con una constante primitiva 0 y los axiomas

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ \neg\, 0 = 1 \end{cases} \tag{14.12}$$

es trivial.

Una clase de axiomas singularmente importante para la moderna matemática axiomática y que entra asimismo aquí, es la constituida por los axiomas de orden.

Consideremos el sistema de axiomas

$$\begin{cases} x \leq y \vee y \leq x \\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \\ x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z \\ \neg\, z \leq 0 \wedge x \leq y \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z \end{cases} \tag{14.13}$$

con un símbolo primitivo $\leq$.

Los tres primeros axiomas representan la estructura de «orden total». Una figura que es un anillo y que satisface, al mismo tiempo, todos los axiomas de (14.13) recibe el nombre de «anillo totalmente ordenado».

Los números racionales constituyen (relativamente a su ordenación específica) un anillo totalmente ordenado y, además, «denso». Para formular la densidad nos servimos de la abreviatura

$$x < y \rightleftharpoons x \leq y \wedge \neg\, x = y$$

El axioma de «densidad» es, pues,

$$x < y \rightarrow \vee_z \,.\, x < z \wedge z < y. \tag{14.14}$$

De acuerdo con todo lo anterior, la teoría elemental de cuerpos (densos) totalmente ordenados es, pues, indecidible. E igual ocurre con la teoría elemental de anillos totalmente ordenados. En lo que a esta última concierne, basta con los números enteros

como modelo. Los enteros no están ordenados densamente y la negación de (14.14) les es válida

$$(14.15) \qquad \vee_{x,y} . x < y \wedge \neg \vee_z . x < z \wedge z < y..$$

Así, pues, la teoría elemental de anillos totalmente ordenados no densos tampoco es decidible.

Según MOSTOWSKI y TARSKI (1953) en este caso rige incluso la indecibilidad esencial. El método de la prueba no es otro que «traducir» una teoría reconocidamente indecidible a la teoría de los anillos totalmente ordenados. Si se consigue una traducción tal que no se acceda únicamente —como en los casos considerados hasta este momento— a una extensión consistente, sino a una extensión conservante, hablaremos de una traducción conservante. Vamos a mostrar ahora que la aritmética relativizada de Robinson admite una traducción conservante a la teoría elemental de anillos conmutativos totalmente ordenados y no densos.

De los axiomas de esta teoría cabe deducir, en primer término,

$$\vee_t . 0 < t \wedge \wedge_z . 0 < z \rightarrow t \leq z..$$

Si abreviamos esta fórmula mediante $\vee_t p(t)$, se sigue:

$$p(t_1) \wedge p(t_2) \rightarrow t_1 = t_2$$

Cabe, pues, trabajar en la teoría con un descriptor de la forma

$$\tau = \iota_t p(t)$$

donde τ designa el menor elemento positivo.

En la aritmética de Robinson relativizada respecto de N con los términos primitivos 0, x', $x + y$, $x \cdot y$ y las fórmulas primitivas Nx («x es un número natural») y $x = y$ sustituimos $x \cdot y$ por $x^\circ y$; acto seguido decidimos traducir x', $x^\circ y$ y Nx a la teoría elemental de anillos ordenados. Como traducción nos servimos de

$$(14.16) \quad \begin{cases} Nu \leftrightarrow 0 \leq u \wedge \vee_x u = x \cdot \tau \\ u' = u + \tau \\ u^\circ v = w \leftrightarrow \vee_{x,y} . u = x \cdot \tau \wedge v = y \cdot \tau \wedge w = \\ = (x \cdot y) \cdot \tau. \end{cases}$$

Afirmar que la extensión de la teoría elemental de nuestros anillos mediante (14.16) y los axiomas de la aritmética relativizada de Robinson es conservante equivale a decir que las traducciones de los axiomas de Robinson relativizados a la teoría de anillos deben ser derivables. Como en la aritmética de Robinson figura $u^\circ v$ como término, será preciso mostrar previamente para la tercera línea de (14.16) que el miembro de la derecha determina unívocamente para todos u, v con $Nu \wedge Nv$ un w con Nw. Lo que se deriva del hecho de que para todo u con Nu hay un x unívocamente determinado por $u = x \cdot \tau$:

$$x_1 \cdot \tau = x_2 \cdot \tau \rightarrow x_1 = x_2$$

ya que $$x_1 < x_2 \rightarrow x_1 \cdot \tau < x_2 \cdot \tau$$

como es bien fácil de mostrar.

Tenemos que traducir ahora los axiomas de la aritmética relativizada de Robinson y derivarlos en la teoría de anillos. Vamos a considerar, en primer término, los siguientes axiomas:

$$(14.17) \quad \begin{cases} N0 \\ Nu \rightarrow Nu' \\ Nu \wedge Nv \rightarrow N(u + v) \\ Nu \wedge Nv \rightarrow N(u^\circ v) \end{cases}$$

Para la primera línea basta con reparar en la derivabilidad de $0 = 0 \cdot \tau$. Para las dos líneas siguientes basta asimismo con la derivabilidad de

$$u = x \cdot \tau \rightarrow u + \tau = (x + 1) \cdot \tau$$
$$u = x \cdot \tau \wedge v = y \cdot \tau \rightarrow u + v = (x + y) \cdot \tau$$

La cuarta línea es trivial.

Quedan por derivar las traducciones de los siete axiomas de Robinson con las condiciones suplementarias *Nu*, *Nv*, ..., para las variables ocurrentes.

$$(14.18) \quad \begin{cases} u + \tau = v + \tau \rightarrow u = v \\ \neg u + \tau = 0 \\ u = 0 \vee \bigvee_v u = v + \tau \\ u + 0 = u \\ u + (v + \tau) = (u + v) + \tau \\ 0 \circ u = 0 \\ (u + \tau) \circ v = (u \circ v) + v \end{cases}$$

Para el segundo axioma hay que considerar $0 < \tau$ y $0 \leq u$. Para el tercero, de $\neg u = 0$ se sigue, en primer lugar, $\tau \leq u$. De $u = x \cdot \tau$ y por $\bigvee_y \; x = y + 1$ se sigue después $\bigvee_y \; u = y \cdot \tau + \tau$ y acto seguido $0 \leq y \cdot \tau$.

Para el penúltimo axioma basta $y = 0 \rightarrow x \cdot y = 0$

El último axioma exige para $u = x \cdot \tau$ y $v = y \cdot \tau$ los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} u + \tau &= x \cdot \tau + \tau \\ &= (x + 1) \cdot \tau \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (u + \tau) \circ v &= ((x + 1) \cdot y) \cdot \tau \\ &= ((x \cdot y) + y) \cdot \tau \\ &= (x \cdot y) \cdot \tau + y \cdot \tau \\ &= u \circ v + v \end{aligned}$$

De la traducibilidad conservante así probada de una teoría esencialmente indecidible a la teoría elemental de anillos conmutativos totalmente ordenados se desprende también la indecibilidad esencial de esta teoría. Comienza por ser ella misma, en todo caso, indecidible, ya que posee una extensión conservante indecidible. Lo mismo vale para todas sus extensiones consistentes.

Los resultados del capítulo III conducen, por los métodos que acabamos de indicar, a toda una serie de teorías indecidibles. Tanto más dignos de resaltar de los resultados de TARSKI concernientes a la decibilidad de importantes teorías axiomáticas de la matemática moderna. A ellos vamos a dedicarnos en el siguiente apartado.

§ 15. TEORÍAS AXIOMÁTICAS COMPLETAS

Sirviéndonos de un ejemplo muy sencillo vamos a demostrar, en primer lugar, el método de «eliminación de cuantificadores» con el que TARSKI probó sus teoremas de la decibilidad.

Consideremos la aritmética de los números naturales reducida a la igualdad. Como términos, únicamente las variables x, y, ..., y como fórmulas primitivas, sólo $x = y$ (con la excepción de $\vee$, $\wedge$). En lugar de $\neg x = y$ escribimos $x \neq y$.

Los axiomas de la teoría son los axiomas de igualdad:

$$(15.1) \quad \begin{cases} x = x \\ x = z \wedge y = z \rightarrow x = y \end{cases}$$

y, para todo n:

$$(15.2) \qquad \bigvee_x \cdot x \neq y_1 \wedge \ldots \wedge x \neq y_n .$$

Para explicar estos axiomas (15.2) mostraremos, en primer lugar, que son derivables en los formalismos aritméticos. Como prueba basta con derivar la adjunción.

$$0 \neq y_1 \wedge \ldots \wedge 0 \neq y_n \; \dot{\vee} \; 1 \neq y_1 \wedge \ldots \wedge 1 \neq y_n \; \dot{\vee} \ldots \dot{\vee} \; n \neq \neq y_1 \wedge \ldots \wedge n \neq y_n$$

en la que hemos escrito 1, 2, ..., en lugar de 0′, 0″, ... En forma normal conjuntiva esta fórmula es una conjunción de miembros

$$0 \neq y_{v_0} \vee 1 \neq y_{v_1} \vee \ldots \vee n \neq y_{v_n}$$

con $v_0, v_1, \ldots, v_n \in \{1, \ldots, n\}$. Todo miembro contiene —de acuerdo con el «teorema del cajón»— por lo menos dos fórmulas

$$k \neq y \text{ así como } l \neq y$$

con iguales variables y e $\vdash k \neq l$. Por

$$\vdash k = y \wedge l = y \rightarrow k = l$$

es, pues, derivable

$$k \neq y \vee l \neq y$$

De donde resulta que todo miembro de la conjunción es derivable, y, de acuerdo con ello, también (15.2).

Se busca, para este fragmento de la aritmética con los axiomas (15.1), (15.2), un procedimiento que permita decidir para cualesquiera fórmulas de esta teoría su derivabilidad en la misma. Para ello las fórmulas han de ser puestas en forma normal; en primer lugar, en forma normal «prenexa» XA, donde A es una fórmula de la lógica de yuntores (es decir, compuesta a partir de las fórmulas primitivas, sin cuantificadores) y X, el prefijo, una sucesión de cuantificadores existenciales o universales en un orden cualquiera.

En el caso de que el prefijo no contenga sino un cuantificador, se busca un método para sustituir la fórmula por una fórmula equivalente de la lógica de yuntores y que en relación con la fórmula de partida no contenga ninguna nueva variable libre. Una vez encontrado tal método, su reiterada aplicación a un enunciado cualquiera (es decir, sin variable libre alguna) en forma natural prenexa da lugar a un enunciado equivalente de la lógica

de yuntores. Para ésta el procedimiento de decisión es, de todos modos, trivial: los enunciados primitivos son $\vee$ y $\wedge$.

En virtud de

$$\wedge_x A(x) \leftrightarrow \neg \vee_x \neg A(x)$$

podemos limitarnos a fórmulas tipo $\vee_x A(x)$ con una fórmula $A(x)$ de la lógica de yuntores. $A(x)$ es puesta en forma normal adjuntiva, es decir, en una adjunción de «conjunciones de base» (conjunciones de fórmulas de base $x = y$ o $x \neq y$). Con lo que tendremos

$$\vee_x A(x) \leftrightarrow \vee_x B_1(x) \vee \ldots \vee \vee_x B_n(x)$$

con conjunciones de base $B_1(x), \ldots, B_n(x)$.

Toda conjunción de base puede ser asimismo normalizada (en relación a x) del siguiente modo:

$$x = y_1 \wedge \ldots \wedge x = y_m \wedge x \neq z_1 \wedge \ldots \wedge x \neq z_n \wedge B$$

donde B no contiene la variable x.

Unicamente queda, pues, por efectuar la eliminación de cuantificadores para las fórmulas

$$\vee_x . x = y_1 \wedge \ldots \wedge x = y_m \wedge x \neq z_1 \wedge \ldots \wedge x \neq z_n.$$

Hay que distinguir, a este respecto, los casos siguientes:

(1) $m > 0, n > 0$

(2) $m > 0, n = 0$

(3) $m = 0, n > 0$

Podemos dar por supuesto que ninguna de las variables $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$ es la variable x, ya que vale

$$x = x \leftrightarrow \vee$$

$$x \neq x \leftrightarrow \wedge$$

Los casos con $m > 0$ pueden ser reducidos a $m = 1$ en virtud de

$$x = y_1 \wedge \ldots \wedge x = y_m \leftrightarrow x = y_1 \wedge y_1 = y_2 \wedge \ldots \wedge y_1 = y_m$$

El caso (1) es tratado por

$$\vee_x . x = y \wedge x \neq z_1 \wedge \ldots \wedge x \neq z_n . \leftrightarrow y \neq z_1 \wedge \ldots \wedge y \neq z_n$$

el caso (2) por

$$\vee_x \; x = y \; \leftrightarrow \vee$$

y el caso (3), de acuerdo con (15.2) por

$$\vee_x . x \neq z_1 \wedge \ldots \wedge x \neq z_n . \; \leftrightarrow \vee$$

Con esta eliminación de cuantificadores se ha probado incluso más que la decibilidad: se ha evidenciado que para todo enunciado A de la teoría cabe decidir si vale $\vdash A$ o $\vdash \neg A$.

De manera, pues, que la teoría elemental de la igualdad aritmética no es únicamente decidible, sino asimismo completa. Puede incluso hablarse, más exactamente, de completitud efectiva, ya que la decisión entre $\vdash A$ y $\vdash \neg A$ puede acontecer de manera efectiva.

No se obtiene esta efectividad, por cierto, si para la prueba de la completitud se elige el siguiente —y más inmediato— camino. Considérense los modelos de la teoría. Para que un conjunto M pueda ser el conjunto básico de un modelo de la teoría, basta con exigir la existencia de una infinidad de elementos en M. El símbolo primitivo $=$ de la teoría es interpretado acto seguido como «la» igualdad de M. (Estos modelos pueden recibir el nombre de modelos de igualdad lógica. Si se interpreta $=$ a la manera de una igualdad totalmente abstracta cualquiera $\sim$ en M, los *abstracta* relativos a $\sim$ constituirán una interpretación de igualdad lógica.)

Como los elementos de M son infinitos, los axiomas (15.1), (15.2) son —como hemos mostrado— verdaderos en M. Si para un enunciado A de la teoría axiomática ni A ni $\neg A$ fueran derivables, de acuerdo con el teorema de completitud de GÖDEL existiría (en el sentido clásico) un modelo infinito M_+ en el que A sería verdadero y un modelo infinito M_- en el que $\neg A$ sería verdadero. (Si se desarrolla esta consideración en el marco de una teoría axiomática de conjuntos se observa adicionalmente la existencia de la posibilidad de elegir modelos infinitamente «numerables». Para la matemática constructiva, sin embargo, que no se ocupa sino de figuras finitas, construidas de acuerdo con reglas dadas, tal observación resulta superflua.) De darse una correspondencia biunívoca entre M_+ y M_-, como $=$ no figura sino como símbolo primitivo, dicha correspondencia sería un isomorfismo para los modelos de la teoría. Una derivación (semántica) de la verdad de A en M_+ se convertiría, pues, en virtud del isomorfismo, en una derivación (semántica) de la verdad de A también en M_-. Con lo cual estamos ante una contradicción, quedando probada la completitud (clásica).

Hay que contar con la posibilidad de que todos los modelos de una teoría sean isomorfos, en cuyo caso no existe sino un único tipo como modelo abstracto. Tales teorías reciben el nombre de «monomorfas». (En la teoría axiomática de conjuntos bastaría con definir la monomorfía para modelos de igual número cardinal.)

De la monomorfía (en lo numerable) se sigue clásicamente la completitud, de manera que de la incompletitud de los formalismos aritméticos se sigue su polimorfía (SKOLEM, 1933). Por el contrario, la teoría de los órdenes totales densos no limitados es monomorfa. En este contexto «no limitado» quiere decir que se exige que:

$$\wedge_y \vee_{x,z} . x < y \wedge y < z.$$

La completitud clásica de esta teoría permite suponer, para la matemática constructiva, que cabe encontrar un procedimiento de decisión para la completitud efectiva. Renunciamos aquí, no obstante, a realizarlo. De acuerdo con CANTOR, hay que contar, de todos modos, con la «isonomía» de la teoría: todos sus modelos son isónomos, es decir, que la clase de los enunciados elementales verdaderos es la misma para todos los modelos. Esta isonomía es equivalente, en sentido clásico, a la completitud.

El paso de la monomorfía a la completitud (o, en todo caso, a la isonomía) no es reversible. La teoría de los cuerpos algebraicos cerrados constituye un importante ejemplo. En favor de

la brevedad entenderemos como «cuerpo» en lo que sigue un cuerpo conmutativo de característica 0. «Característica 0» quiere decir aquí que a los axiomas se les añade:

$$(15.3)\qquad \left\{\begin{array}{r} 1+1\neq 0 \\ 1+1+1\neq 0 \\ 1+1+1+1\neq 0 \\ \vdots \end{array}\right.$$

Utilizaremos, además, las siguientes abreviaturas:

$$x^2 \leftrightharpoons x\cdot x$$
$$x^3 \leftrightharpoons x\cdot x\cdot x$$
$$\vdots$$

La cerrazón algebraica viene representada por el axioma

$$(15.4)\qquad \vee_x\ x^n + z_1\cdot x^{n-1} + \ldots + z_n = 0 \quad \text{para todo } n>0$$

Para probar la completitud efectiva de esta teoría resultarán necesarios algunos conocimientos elementales de álgebra. Hay que saber, en primer lugar, que la teoría es consistente, ya que los números algebraicos constituyen un modelo. (Dado que sólo está definido en el marco de la teoría axiomática de conjuntos, prescindimos aquí del modelo de «todos» los números complejos.)

Que la teoría no sea monomorfa, sino poliforma, se deriva del hecho de que los cuerpos algebraicos cerrados únicamente son isomorfos si poseen idéntico grado de trascendencia. El cuerpo k de los números algebraicos tiene, por ejemplo, el grado de trascendencia 0; la cerrazón algebraica de $k(\xi)$ —con un ξ indeterminado— tiene un grado de trascendencia 1.

En el marco de la teoría axiomática de conjuntos cabría probar como sigue, con la ayuda de los números cardinales, una completitud de esta teoría. Sea c un número cardinal transfinito.

Todos los cuerpos del número cardinal c tienen el grado de trascendencia c, y, en consecuencia, todos los modelos de este número cardinal son isomorfos. Supongamos de nuevo que para un enunciado A no son derivables A ni $\neg A$ y sea M_+ (o M_-) un modelo en el que A (o $\neg A$) es verdadero. Por la característica 0 los modelos son infinitos y puede suponerse, además (cfr. a este respecto A. ROBINSON, 1951), que ambos modelos tienen el número cardinal c. Lo cual lleva a la contradicción buscada.

Como la consistencia de la teoría axiomática de conjuntos que utilizamos aquí no ha sido probada todavía, este resultado sólo justifica la conjetura de la completitud efectiva de la teoría elemental de los cuerpos algebraicos cerrados.

De hecho, el método de la eliminación de cuantificadores conduce también aquí fácilmente al objetivo. Para simplificar la escritura utilizamos además de 0 y 1 una constante —1. Constante que puede ser eliminada siempre por la vía del descriptor:

$$-1 = \iota_x\,(x + 1 = 0)$$

En lugar de $x + (-1)\cdot y$ escribimos más brevemente $x - y$. Todas las fórmulas primitivas $s_1 = s_2$ de la teoría (con s_1 y s_2 como términos cualesquiera) pueden ser puestas en forma $s = 0$, es decir, con $s = s_1 - s_2$.

De ahí que como fórmulas básicas utilicemos $s = 0$ y $s \neq 0$.

Toda fórmula de la lógica de yuntores es una adjunción de conjunciones de estas fórmulas básicas.

En virtud de $t_1 \neq 0 \wedge t_2 \neq 0 \leftrightarrow t_1\cdot t_2 \neq 0$
las conjunciones básicas pueden ser puestas en la forma normal

$$s_1 = 0 \wedge s_2 = 0 \wedge \ldots \wedge s_m = 0 \wedge t \neq 0$$

(con $m = 0$ eventualmente). Escribimos más brevemente

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0 \neq t$$

La tarea de eliminar cuantificadores queda así reducida a transformar las fórmulas

$$\vee_x\ .\ s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0 \neq t$$

en fórmulas equivalentes de la lógica de yuntores con iguales variables libres. Podemos admitir aún que la variable x figure en

los términos s_1, ..., s_m. Reemplazaremos siempre todo término en el que figure x por su forma normal como polinomio en x:

$$t_0 \cdot x^n + t_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + t_n$$

Los coeficientes t_0, ..., t_n son aquí términos que no contienen la variable x.

De acuerdo con un conocido algoritmo del álgebra se puede calcular, a partir de los polinomios en x: s_1, ..., s_m, el mayor divisor común $s \cdot s$ es un polinomio en x o un término en el que no figura x.

Distinguimos ahora los siguientes casos:

(1) $m > 0$, t es un polinomio en x

(2) $m > 0$, t no es un polinomio en x

(3) $m = 0$, t es un polinomio en x

En el caso (1)

$$\vee_x \cdot s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0 \neq t.$$

equivale a decir que para el mayor divisor común s de s_1, ..., s_m un cero de s no es un cero de t. Hay un algoritmo para calcular a partir de s un polinomio $\bar{s}$ que tenga los mismos ceros que s, pero todos de orden de multiplicidad 1. La fórmula anterior es, pues, equivalente a $\neg\, \bar{s} | t$, no siendo $\bar{s}$ divisor de t.

El algoritmo para decidir si un polinomio en x es divisor o no de otro procura la fórmula de lógica de yuntores que se busca a partir de los coeficientes de los polinomios $\bar{s}$ y t.

El caso (2) se reduce a $\vee_x \cdot s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0$, es decir, a $\vee_x s = 0$.

Si s es un polinomio en x con los coeficientes t_0, ..., t_n, esta fórmula es, de acuerdo con (15.4) equivalente a $t_0 \neq 0 \vee \ldots \vee t_{n-1} \neq 0 \vee t_n = 0$.

En el caso (3)

$$\vee_x t \neq 0$$

equivale a la validez de $t_v \neq 0$ para por lo menos uno de los coeficientes t_v $(v \leq 0)$ de $t \cdot (t$ tiene, en efecto, a lo sumo, un número finito de ceros, siendo, por el contrario, infinito el número de elementos del cuerpo).

Con lo cual queda descrito el procedimiento de decisión. Todo enunciado A de la teoría es transformado mediante la eliminación de cuantificadores en un enunciado equivalente de la lógica de yuntores. Los términos de un enunciado A de la lógica de yuntores están compuestos únicamente a partir de 0,1, —1, de ahí que sea fácil distinguir entre $\vdash A$ y $\vdash \neg A$.

De la completitud se deriva el caso particular de la isonomía, conocido con el nombre de «principio de LEFSCHETZ»:

Si un enunciado elemental es verdadero en un cuerpo numérico algebraico cerrado, lo es también en todo cuerpo algebraico cerrado de característica 0.

Los enunciados «elementales» no necesitan ser restringidos en este principio a los de la teoría axiomática de cuerpos. Así, pues, si A_1, A_2, ..., es una sucesión de semejantes enunciados elementales en sentido estricto, el principio vale evidentemente también para los enunciados $\wedge_n A_n$ y $\vee_n A_n$. Esta cuantificación aritmética puede ser reiterada con la composición a base de yuntores y lleva a una clase de enunciados «aritméticos elementales» para los que la isonomía aún resulta válida.

Vamos a examinar, por último, el procedimiento de decisión de TARSKI para la teoría elemental de cuerpos reales cerrados.

Se dice que un cuerpo es «formalmente real» si vale para el mismo:

(15.5) $\quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$ para todo n.

Los cuerpos formalmente reales tienen siempre la característica 0.

Los cuerpos totalmente ordenados son siempre formalmente reales.

Se dice que un cuerpo totalmente ordenado es «real-cerrado» si para todo término $s(x)$ satisface el siguiente axioma:

(15.6) $\quad x < z \wedge s(x) < 0 < s(z) \rightarrow \vee_y \cdot x < y < z \wedge s(y) = 0$

Los números algebraicos reales constituyen un modelo para esta estructura de cuerpos reales-cerrados. Tampoco resulta ne-

cesario aquí hacer uso de la teoría de CANTOR-DEDEKIND (concebible únicamente en el marco de una teoría axiomática de conjuntos) de «todos» los números reales.

En cuanto al procedimiento de decisión, las fórmulas

$$\vee_x B(x)$$

con las conjunciones de base $B(x)$, han de ser transformadas en fórmulas equivalentes de la lógica de yuntores (sin nuevas variables libres). Como fórmulas atómicas tomamos $x = y$ y $x < y$. En virtud de

$$x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$$

estas fórmulas bastan como fórmulas atómicas. Bastan también como fórmulas básicas, ya que las negaciones de las fórmulas atómicas pueden expresarse asimismo a través de ellas:

$$\neg x = y \leftrightarrow x < y \vee y < x$$

$$\neg x < y \leftrightarrow y \leq x$$

Con $$x < y \leftrightarrow 0 < y - x$$

podemos normalizar las conjunciones básicas llevándolas a:

$$s_1 = 0 \wedge \ldots \wedge s_m = 0 \wedge 0 < t_1 \wedge \ldots \wedge 0 < t_n$$

Por

$$s_1 = 0 \wedge \ldots \wedge s_m = 0 \leftrightarrow s_1^2 + \ldots + s_m^2 = 0$$

podemos seguir normalizando hasta

$$s = 0 \wedge t_1 > 0 \wedge \ldots \wedge t_n > 0$$

Tenemos, pues, que eliminar el cuantificador de las fórmulas

$$\vee_x . s = 0 \wedge t_1 > 0 \wedge \ldots \wedge t_n > 0.$$

Distinguimos los siguientes casos:

(1) s es un polinomio en x, $n \leq 1$

(2) s es un polinomio en x, $n > 1$

(3) s no es un polinomio en x, $n > 0$

En los dos primeros casos llevaremos a cabo la eliminación de cuantificadores para $\vee_x B(x)$ dando un procedimiento de cálculo para el número $N_x B(x)$ de los x que satisfacen $B(x)$. Si s tiene, como polinomio en x, el grado m (es decir, si x^m es su máxima potencia), dicho número será a lo sumo igual a m. Tenemos así la validez de

$$\vee_x B(x) \leftrightarrow N_x B(x). = 1 \vee N_x B(x) = 2 \vee \ldots \vee N_x B(x) = m$$

El procedimiento de cálculo debe ser formulado de tal manera que resulte evidente cómo se accede para todo $l \leq m$ a una fórmula de la lógica de yuntores equivalente a $N_x B(x) = l$.

En el caso (1) el agoritmo de STURM procura, si $n = 0$, un procedimiento de este tipo. Procedimiento que ha sido generalizado por TARSKI de tal manera que resulta válido asimismo para $n = 1$. Siendo, pues, s y t términos cualesquiera, y de ellos por lo menos s un polinomio en x, se busca un procedimiento de cálculo para N_x $(s = 0 < t)$. Basta para ello con dar por supuesto que s y t carecen de común divisor. (Se calcula el mayor divisor común de s y t y se simplifica. Desaparecen así únicamente los x con $s = 0 = t$.) Puede suponerse asimismo que s carece de solución múltiple.

A partir de s se calcula acto seguido el polinomio s' derivado en x, el cual para un polinomio

$$t_0 \cdot x^m + t_1 \cdot x^{m-1} + \ldots + t_m$$

es definido por

$$mt_0 \cdot x^{m-1} + (m - 1)\, t_1 \cdot x^{m-2} + \ldots + t_{m-1}$$

(donde los múltiplos lt de un término t son definidos naturalmente por $1t = t$, $2t = t + t$, ...).

Acto seguido se aplica un algoritmo euclídeo modificado a s y $s' \cdot t$, es decir, se calculan términos $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_l$ y $q_1, q_2, \ldots, q_l$ de tal manera que partiendo de $s_0 = s$ y $s_1 = s' \cdot t$ valga:

$$s_0 = s_1 \cdot q_1 - s_2$$

$$s_1 = s_2 \cdot q_2 - s_3$$

$$\ldots$$

$$s_{l-2} = s_{l-1} \cdot q_{l-1} - s_l$$

$$s_{l-1} = s_l \cdot q_l$$

Estos términos están unívocamente determinados, ya que los grados de los polinomios en x: s_1, s_2, ..., s_l son estrictamente decrecientes:

$$\text{grado } s_1 > \quad \text{grado } s_2 > \ldots > \quad \text{grado } s_l$$

En el caso de que grado s_0 < grado s_1, tendremos que $q_1 = 0$.

Como s carece de solución múltiple, s y s' carecen de común divisor. Como s y t carecen de común divisor, también s y $s' \cdot t$ carecen de él. De manera, pues, que s_l es un término con $s_l \neq 0$, que no contiene más x.

De la sucesión de polinomios de STURM $s_0(x)$, $s_1(x)$, ..., $s_l(x)$ puede, en primer lugar, derivarse:

$$(15.7) \quad \begin{cases} s(x) = 0 < t(x) \rightarrow s_0(x-u) \cdot s_1(x-u) < 0 \\ s(x) = 0 < t(x) \rightarrow s_0(x+u) \cdot s_1(x+u) > 0 \\ s(x) = 0 > t(x) \rightarrow s_0(x-u) \cdot s_1(x-u) > 0 \\ s(x) = 0 > t(x) \rightarrow s_0(x+u) \cdot s_1(x+u) < 0 \end{cases}$$

en el caso de que u sea positivo y «suficientemente pequeño». Las fórmulas de (15.7) deben ir, pues, precedidas de

$$\bigvee_v \bigwedge_u . \, 0 < u < v \rightarrow$$
$$v > 0$$

Como prueba se utiliza la fórmula de Taylor con un polinomio $r(x, u)$:

$$s(x+u) = s(x) + u\, s'(x) + u^2 r(x, u)$$

Para $s(x) = 0$ se sigue

$$s(x-u) = -u\, s'(x) + u^2\, r(x, -u)$$
$$s(x+u) = u\, s'(x) + u^2\, r(x, u)$$

lo que con $s'(x) \neq 0$ da (15.7).

Es derivable asimismo

$$(15.8) \qquad \neg . \, s_j(x) = 0 \wedge s_{j+1}(x) = 0. \qquad (j = 0, \ldots, l-1)$$

ya que de lo contrario se seguiría $s_l(x) = 0$.

$$(15.9) \qquad s_j(x) = 0 \rightarrow s_{j-1}(x) \cdot s_{j+1}(x) < 0 \qquad (j = 1, \ldots, l-1)$$

se sigue, a su vez, de la ecuación $s_{j-1} = s_j \cdot q_j - s_{j+1}$

Cabe encontrar ahora el buscado número de soluciones con ayuda del número de «cambios de signo» de la sucesión de STURM. Para ello habremos de «contar» los índices $j > 0$, para los que vale $s_j(x) \neq 0$ y $s_{j-1}(x) \cdot s_j(x) \leq 0$. El número de este índice es, a lo sumo, l. De manera, pues, que

$$\underset{j>0}{N_j} (s_j(x) \neq 0 \wedge s_{j-1}(x) \cdot s_j(x) \leq 0) = k$$

para $k = 0, \ldots, l$ ha de ser expresado mediante una fórmula de la lógica de yuntores que, además de las variables libres que de por sí figuren en los coeficientes del polinomio, contenga x. Así, por ejemplo:

$$\underset{j>0}{N_j} (s_j(x) \neq 0 \wedge s_{j-1}(x) \cdot s_j(x) \leq 0) = 0$$

se expresará mediante $\neg \cdot s_1 \neq 0 \wedge s_0 \cdot s_1 \leq 0 \cdot \wedge \neg \cdot s_2 \neq 0 \wedge s_1 \cdot s_2 \leq 0 \, . \wedge \ldots \wedge \neg \cdot s_l \neq 0 \wedge s_{l-1}\, s_l \leq 0$

Supongamos ahora —con vistas a nuestra reflexión metamatemática— que $k(x)$ es justamente la k para la que la fórmula que expresa

$$\underset{j>0}{N_j} (s_j(x) \neq 0 \wedge s_{j-1}(x) \cdot s_j(x) \leq 0) = k$$

es derivable.

De acuerdo con la generalización tarskiana del teorema de STURM, dándose las condiciones $x_0 < x_1$, $s(x_0) \neq 0$ y $s(x_1) \neq 0$ cabe derivar una fórmula que exprese:

$$(15.10) \qquad k(x_0) - k(x_1) = \underset{x_0 < x < x_1}{N_x} (s = 0 < t) - \underset{x_0 < x < x_1}{N_x} (s = 0 > t)$$

$\underset{x_0 < x < x_1}{N_x} B(x)$ significa aquí el número de x que satisfacen $x_0 < x < x_1$

y $B(x)$. Las ecuaciones del tipo $N_x\ B(x) = k$ son expresadas con la ayuda de cuantificadores, como, por ejemplo, $N_x\ B(x) = 0$ mediante $\neg \bigvee_x B(x)$.

Para probar el teorema de SturM-Tarski habrán de ser calculadas las diferencias $k(x - u) - k(x + u)$ para aquellos x que son solución al menos de uno de los miembros de la sucesión de Sturm y para un u lo «suficientemente pequeño». Si no hay solución alguna de por lo menos uno de los miembros s_0, ..., s_l, entre $x - u$ y $x + u$, tendremos:

$$k(x - u) - k(x + u) = 0 \tag{15.11}$$

El número de los cambios de signo no varía aunque se pase de $x - u$ a $x + u$, ya que, en virtud del axioma (15.6), no hay miembro de la sucesión que cambie de signo.

Si x es solución de uno de los miembros s_1, ..., s_l, no por ello varía tampoco el número de cambios de signo para un u suficientemente pequeño. Sea, por ejemplo, $s_j(x) = 0$ $(j \leq 1)$. De acuerdo con (15.8), (15.9) tenemos para los signos de $s_{j-1}(x)$, $s_j(x)$, $s_{j+1}(x)$ las siguientes posibilidades:

$$+, 0, - \text{ ó } -, 0, +$$

Consideremos, por ejemplo, la primera posibilidad. Para $x - u$ o $x + u$, respectivamente, los signos son, en tal caso, en lugar de x, bien

$$+, +, - \text{ o, respectivamente, } +, -, -$$
$$\text{bien } +, +, - \text{ o, respectivamente, } +, +, -$$
$$\text{bien } +, -, - \text{ o, respectivamente, } +, +, -$$
$$\text{bien } +, -, - \text{ o, respectivamente, } +, -, -$$

El número de cambios de signo no varía de hecho. Lo mismo vale para la segunda posibilidad.

Quedan por calcular las diferencias $k(x - u) - k(x + u)$ para las soluciones de s_0, es decir, de s. Sea, por ejemplo, $s(x) = 0 < t(x)$. Para los signos de $s_0(x)$, $s_1(x)$ tenemos las posibilidades $0, +$ o $0, -$.

En el primer caso, poniendo $x - u$ o $x + u$, respectivamente, en lugar de x, los signos son, en virtud de (15.7):

$$-, + \text{ o, respectivamente, } +, +$$

De manera, pues, que en el paso de $x - u$ a $x + u$ se pierde un cambio de signo, es decir,

$$k(x - u) - k(x + u) = 1 \tag{15.12}$$

E igual en el segundo caso.

Si, por el contrario, $s(x) = 0 < t(x)$, de acuerdo con (15.7) resulta que se gana un cambio de signo:

$$k(x - u) - k(x + u) = -1 \tag{15.13}$$

De acuerdo con (15.11)-(15.13), pasando por $k(x - u) - k(x + u)$ de x_0 a x_1, los x tales que $s(x) = 0 < t(x)$ son contados positivamente y los x tales que $s(x) = 0 > t(x)$, negativamente. Esto es, precisamente, lo que venía a decir (15.10).

Con la yuda de (15.10) hemos de calcular ahora $N_{x_0 < x < x_1}\ (s = 0 < t)$.

Si x no figura en t, por (15.10) se obtiene el teorema de Sturm. Con la condición, por ejemplo, de que $0 < t$, se obtiene, en efecto,

$$k(x_0) - k(x_1) = N_{x_0 < x < x_1}\ (s(x) = 0) \tag{15.14}$$

Y como para cualquier t

$$N_{x_0 < x < x_1}\ (s = 0 < t) + N_{x_0 < x < x_1}\ (s = 0 > t)\ N_{x_0 < x < x_1}\ (s = 0) \tag{15.15}$$

y ya se puede calcular aquí el miembro de la derecha, se obtiene $N_{x_0 < x < x_1}\ (s = 0 < t)$ por adición con (15.10).

Para llegar al $N_x\ (s = 0 < t)$ buscado, bastará con mostrar que para x_0, x_1, apropiados vale

$$N_x\ (s = 0 < t) = N_{x_0 < x < x_1}\ (s = 0 < t)$$

Lo que se consigue por derivación —de acuerdo con un conocido procedimiento algebraico— a partir de las fórmulas:

$$(15.16)\qquad \begin{cases} \vee_{x_0}\ \wedge_x . \ x < x_0 \rightarrow s(x) \neq 0. \\ \vee_{x_1}\ \wedge_x . \ x > x_1 \rightarrow s(x) \neq 0. \end{cases}$$

El procedimiento de cálculo para $N_x\ (s = 0 < t)$ que acabamos de exponer puede ser transformado sin mayor dificultad —siempre que las fórmulas sean detalladas— en un procedimiento que partiendo de los coeficientes de s y t procura una fórmula de la lógica de yuntores cuya equivalencia con la fórmula que expresa $N_x\ (s = 0 < t)$ es derivable. De manera, pues, que también para $\vee_x \cdot s = 0 < t \cdot$ cabe aducir una fórmula equivalente de la lógica de yuntores.

El caso (1) de la eliminación de cuantificadores queda así resuelto. En lo tocante al caso (2) se calcula asimismo $N_x\ (s = 0 \wedge t_1 > 0 \wedge \ldots \wedge t_n > 0)$. Este cálculo puede retrotraerse al cálculo del caso (1).

Supongamos que —para una condición cualquiera A— sabemos calcular $\underset{A}{N}_x\ (t > 0)$. De acuerdo con el caso (1) está hipótesis resulta válida para las condiciones $s = 0$. Vamos a calcular ahora $\underset{A}{N}_x\ (t_1 > 0 \wedge t_2 > 0)$. Para ello basta con establecer las condiciones siguientes:

$$(15.17)\qquad \begin{cases} \underset{A}{N}_x\ (t_1 > 0 \wedge t_2 > 0) + \underset{A}{N}_x\ (t_1 > 0 \wedge t_2 < 0) = \\ \quad = \underset{A}{N}_x\ (t_1\, t_2{}^2 > 0) \\ \underset{A}{N}_x\ (t_1 > 0 \wedge t_2 > 0) + \underset{A}{N}_x\ (t_1 < 0 \wedge t_2 > 0) = \\ \underset{A}{N}_x\ (t_1{}^2\, t_2 > 0) \\ \underset{A}{N}_x\ (t_1 > 0 \wedge t_2 < 0) + \underset{A}{N}_x\ (t_1 < 0 \wedge t_2 > 0) = \\ \quad = \underset{A}{N}_x\ (t_1\, t_2 < 0) \end{cases}$$

Los miembros de la derecha son, por hipótesis, calculables. (Para la tercera línea se utiliza $t < 0 \leftrightarrow -t > 0$.) La adición de las dos primeras ecuaciones y la sustracción subsiguiente de la tercera da lugar al resultado buscando: $\underset{A}{N}_x\ (t_1 > 0 \wedge t_2 > 0)$.

Disponemos así de un procedimiento de cálculo para $\underset{A \wedge t_1 > 0}{N}_x\ (t_2 > 0)$.

Las aplicaciones sucesivas de esta reflexión procuran un procedimiento de cálculo para $N_x\ (s = 0 \wedge t_1 > 0 \wedge \ldots \wedge t_n > 0)$ y con ello la eliminación de cuantificadores para el caso (2).

En lo concerniente al caso (3) quedan por considerar las fórmulas

$$\vee_x . \ t_1 > 0 \wedge t_2 > 0 \wedge \ldots \wedge t_n > 0$$

De acuerdo con el axioma (15.6) resulta derivable

$$\wedge_{x_0} \underset{x \leq x_0}{\vee_x}\ t > 0 \rightarrow \vee_{x_0} \underset{x \leq x_0}{\wedge_x}\ t > 0$$

ya que a partir de

$$\wedge_{x_0} \underset{x \leq x_0}{\vee_x}\ t > 0 \quad \text{y} \quad \wedge_{x_0} \underset{x \leq x_0}{\vee_x}\ t \leq 0$$

puede derivarse la existencia de una infinidad de soluciones de t.

Cabe derivar, asimismo,

$$\wedge_{x_1} \underset{x \geq x_1}{\vee_x}\ t > 0 \rightarrow \vee_{x_1} \underset{x \geq x_1}{\wedge_x}\ t > 0$$

En estas fórmulas $t > 0$ puede ser sustituido por $t_1 > 0 \wedge \ldots \wedge t_n > 0$. De ahí que con $B(x)$ en lugar de $t_1 > 0 \wedge \ldots \wedge t_n > 0$ resulten derivables:

$$\vee_{x_0} \underset{x \leq x_0}{\wedge_x}\ B(x) \vee \vee_{x_0} \underset{x \leq x_0}{\wedge_x} \neg B(x)$$
$$\vee_{x_1} \underset{x \geq x_1}{\wedge_x}\ B(x) \vee \vee_{x_1} \underset{x \geq x_1}{\wedge_x} \neg B(x)$$

De donde resulta, en fin, la derivabilidad de

$$(15.18)\qquad \vee_x\ B(x) \leftrightarrow \vee_{x_0} \underset{x \leq x_0}{\wedge_x}\ B(x) \vee \vee_{x_1} \underset{x \geq x_1}{\wedge_x}\ B(x) \vee$$
$$\vee \underset{x_0 < x_1}{\vee_{x_0, x_1}} . \underset{x_0 < x < x_1}{\vee_x}\ B(x) \wedge \underset{\neg\, x_0 < x < x_1}{\wedge_x} \neg B(x).$$

No es difícil aducir fórmulas equivalentes de la lógica de yuntores para los dos primeros miembros de la parte derecha de esta adjunción. En álgebra se diría que se trata de las condiciones en las que valen $t(+\infty) > 0$ ó $t(-\infty) > 0$, respectivamente, para un polinomio $t(x)$ (o para varios). Como se sabe, para ello basta una condición concerniente al carácter positivo o negativo (según el grado del polinomio sea par o impar) de los coeficientes más elevados.

Supongamos ahora que las negaciones de los dos primeros miembros de la adjunción de (15.18) son derivables y admitamos, para empezar, la derivabilidad de $\vee_x B(x)$. En virtud de (15.18) tenemos la derivabilidad de

$$\bigvee_{\substack{x_0, x_1 \\ x_0 < x_1}} \cdot \bigvee_{x_0 < x < x_1} B(x) \wedge \neg B(x_0) \wedge \neg B(x_1).$$

Para el polinomio $t = t_1 \cdot t_2 \ldots \cdot t_n$ vale

$$B(x) \rightarrow t(x) > 0$$

De acuerdo con el axioma (15.6) y en virtud de

$$\neg B(x) \rightarrow t_1(x) \leq 0 \vee \ldots \vee t_n(x) \leq 0$$

se sigue la derivabilidad de

$$\bigvee_{\substack{x_0, x_1 \\ x_0 < x_1}} \cdot\ t(x_0) = t(x_1) = 0 \wedge \bigwedge_{x_0 < x < x_1} B(x).$$

Por el teorema de ROLLE se sigue para el polinomio derivado t'

$$\vee_x \cdot t'(x) = 0 \wedge B(x)$$

Hemos obtenido así la derivabilidad de

$$\text{(15.19)} \qquad \vee_x B(x) \leftrightarrow \vee_x \cdot t'(x) = 0 \wedge B(x).$$

bajo la hipótesis de la negación de los dos primeros miembros de la adjunción de (15.18).

Para el caso (1) ó (2) puede sustituirse en (15.19) el miembro de la derecha por una fórmula de la lógica de yuntores. Como esto vale también para los dos primeros miembros de la adjunción (15.18), queda descrita la eliminación de cuantificadores para todos los casos. El procedimiento general termina, pues, si partimos de un enunciado, por un enunciado equivalente de la lógica de yuntores. Para un término constante s, sin embargo, $s = 0$ y $s > 0$ pueden ser considerados de inmediato como equivalentes a $\vee$ o $\wedge$.

Queda probada así la completitud efectiva de la teoría elemental de cuerpos reales cerrados.

Paralelamente al principio de LEFSCHETZ se sigue aquí el principio (de isonomía) de TARSKI:

Si un enunciado aritmético elemental es verdadero en un cuerpo real cerrado, lo es también en todo cuerpo real cerrado.

Una consecuencia inmediata de este principio es que el conocido axioma de Arquímedes para cuerpos totalmente ordenados:

$$\text{(15.20)} \qquad \wedge_x \vee_n x < n\,1$$

que se remonta a EUDOXO (cfr. EUCLIDES V, Def. 4) no es aritméticamente elemental (en el sentido arriba definido). Como prueba basta con mostrar la inexistencia de cuerpos reales cerrados no arquimédicos.

Otra consecuencia es la concerniente al axioma de continuidad de la teoría de DEDEKIND de los cuerpos reales. Axioma que cabe formular de manera bien sencilla como sigue —haciendo uso del concepto de conjunto—:

«Todo conjunto de números reales no vacío y no limitado inferiormente tiene un número real como límite inferior.»

Para formular este axioma en el seno de la teoría elemental de cuerpos totalmente ordenados, hay que hacerlo al modo de un esquema axiomático para fórmulas cualesquiera $A(x)$ con una variable libre:

$$\text{(15.21)} \qquad \bigvee_{x_0} \bigwedge_{x < x_0} \neg A(x) \wedge \vee_x A(x) \rightarrow \bigvee_{x_1} \cdot \bigwedge_{x < x_1} \neg A(x) \wedge \bigwedge_{x_2 > x_1} \bigvee_{x < x_2} A(x).$$

La validez de este axioma —para todo $A(x)$— en un cuerpo real cerrado cualquiera y, sobre todo, en el cuerpo de los números reales algebraicos se deriva, pues, del procedimiento tarskiano de eliminación de cuantificadores. Como prueba basta con transformar la fórmula $A(x)$ mediante eliminación de cuantificadores en una fórmula equivalente de la lógica de yuntores. Esta puede escribirse como adjunción de conjunciones de base, cuyos miembros conjuntivos tienen la forma $s(x) = 0$ o $s(x) > 0$. Los conjuntos $\epsilon_x\ (s(x) = 0)$ son finitos —para polinomios $s(x)$ en x— y los conjuntos $\epsilon_x\ (s(x) > 0)$ tienen, de acuerdo con el axioma (15.6), un límite inferior si no son vacíos y están limitados inferiormente: la menor solución de $s(x)$. La existencia de un límite inferior se sigue también, en consecuencia, para las intersecciones de un número finito de tales conjuntos y se conserva con la formación de reuniones en número finito. Así se obtiene, no obstante, cualquier conjunto $\epsilon_x\ A(x)$ con una fórmula elemental $A(x)$. En especial para los números reales algebraicos son siempre los límites inferiores de estos conjuntos números reales algebraicos.

Con las «traducciones» de la geometría analítica puede llevarse el procedimiento de decisión —así como la completitud y la isonomía— de la teoría de los cuerpos reales-cerrados al fragmento de la geometría euclídea que surge una vez dejado de lado el axioma de Arquímedes en una axiomatización de la misma (como la de HILBERT, por ejemplo) y reemplazando el axioma de continuidad de DEDEKIND por un esquema axiomático correspondiente a (15.21). Como en este contexto queda excluida la utilización de los números naturales, se trata de un auténtico fragmento de la geometría euclídea. La geometría entera es así decidible a la manera de una extensión consistente de la aritmética.

BIBLIOGRAFIA

BETH, E. W.: «Semantic entailment and formal derivability»; *Mededel. d. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.* 18, 1955; «The Foundations of Mathematics». Amsterdam, 1959.

CHURCH, A.: «A note on the Entscheidungsproblem»; *Journal of Symbolic Logic* 1, 1936.

DAVIS, M.: «Computability and Unsolvability». New York, 1958.

FRAENKEL, A.; BAR-HILLEL, Y.: «Foundations of Set Theory». Amsterdam, 1958.

GENTZEN, G.: «Untersuchungen über das logische Schliessen». *Math. Z.* 39, 1934. «Die Widerspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie». *Math. Ann.* 112, 1936.

GÖDEL, K.: «Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls». *Mon. Hefte f. Mathem. u. Physik* 37, 1930. «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme» I. *Mon. Hefte f. Matehem. u. Physik* 38, 1930. «On undecidable propositions of formal mathematical systems». *Mimeographed lectures*, Princeton, N. Y., 1934.

HASSE, H.: «Über die Dastellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper per rationalen Zahlen». *Journ. f. d. r. u. ang. Math.* 166, 1923.

HERBRAND, J.: «Sur la non-contradiction de l'arithmétique»; *Journ. f. d. r. u. ang. Math.* 166, 1931.

HEYTING, A.: «Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik»; *Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wissenschaft.*, 1930.

HILBERT, D.; ACKERMANN, W.: «Grundzüge der theoretischen Logik», 5 ed. Heidelberg[1], 1967.

HILBERT, D.; BERNAYS, P.: «Grundlagen der Mathematik» I. Berlin, 1934. «Grundlagen der Mathematik» II. Berlin, 1939.

KAMLAH, W.; LORENZEN, P.: «Logische Propädeutik». Mannheim, 1967.

KLEENE, S. C.: «General Recursive Functions of Natural Numbers». *Math. Ann.* 112, 1936. «Introduction to Metamathematics». New York[2], 1952.

LORENZ, K.: «Arithmetik und Logik als Spiele». Kiel, 1961.

LORENZEN, P.: «Einführung in die operative Logik und Mathematik». Heidelberg, 1955. «Formale Logik». Berlin[3], 1958. «Differential und Integral». Frankfurt, 1965.

MARKOV, A. A.: «Teorija algorifmov». Moscú, 1954.

[1] D. Hilbert y W. Ackermann: *Elementos de lógica teórica*, traducción castellana de Víctor Sánchez de Zavala de la 4.ª edic. alemana, Edit. Tecnos, S. A., Madrid, 1962. *(N. del T.)*

[2] S. C. Kleene: *Introducción a la metamatemática*, traducción castellana de Manuel Garrido, en preparación, Edit. Tecnos, S. A., Madrid. *(N. del T.)*

[3] P. Lorenzen: *Lógica formal*, traducción castellana de Juan Ochoa Mélida, Selecciones Científicas, Madrid, 1970. *(N. del T.)*

POST, E. L.: «Finite combinatory processes-formulation» I. *Journal of Symbolic Logic* 1, 1936. «Formal reductions of the general combinatorial decision problem». *Amer. Jour. Math.* 65, 1943.

ROBINSON, A.: «On the Metamathematics of Algebra». Amsterdam, 1951.

ROBINSON, J.: «Definability and decision problems in arithmetic». *Journal of Simbolic Logic* 14, 1949.

ROBINSON, R. M.: «An essentially undecidable axiom system», 1950. *Proc. Intern. Congress of Mathem.* Cambridge, 1952.

ROSSER, J. B.: «A mathematical logic without variables». *Ann. of Math.* 36, 1935. «Extensions of some theorems of GÖDEL and CHURCH». *Journal of Symbolic Logic* 1, 1936.

SCHÜTTE, K.: «Beweistheorie». Heidelberg, 1960.

SKOLEM, Th.: «Über die unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems». *Norsk mat. for. skrifter* 10, 1933.

SZMIELEW, W.: «Elementary properties of Abelian groups». *Fund. Math.* 41, 1955.

TARSKI, A.: «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen», 1933. *Studia philos.* 1, 1936[4]. «A decision method for elementary Algebra and Geometry». *The Rand Corporation*, Santa Mónica, 1948. «On essential undecidability». *Journal of Symbolic Logic* 14, 1949.

TARSKI, A.; MOSTOWSKI, A., y ROBINSON, R. M.: «Undecidable Theories». Amsterdam, 1953.

TURING, A. M.: «On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem». *Proc. London Math. Soc.* 42, 1936.

[4] Existe una versión inglesa de este trabajo, ya clásico, de TARSKI, incluida en su obra *Logic, Semantic, Metamathematics*, Oxford, At the Clarendon Press, 1956, con el título: The Concept of Truth in formalized Languages. Mario Bunge ha incluido en su *Antología semántica*, Ediciones Nueva Visión, Buenos Aires, 1960, una versión simplificada de este trabajo de TARSKI, especialmente dedicada a los lenguajes naturales: «La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica». *(N. del T.)*

INDICE DE NOMBRES

Ackermann, 20
Bar-Hiliel, 166
Beltrami, 9
Bernays, 162 y s.
Beth, 37
Bolyai, J., 9
Boole, 42
Brouwer, 12 y ss., 25
Cantor, 11, 168, 187, 192
Church, 16, 118, 156
Davis, 140
Dedeking, 11, 67, 69, 74, 192, 202
Descartes, 10
Euclides, 54, 201
Eudoxo, 201
Feferman, 163
Fermat, 174
Fraenkel, 12, 166
Frege, 13 y s., 36, 42 y s., 58, 67
Gauss, 9
Gentzen, 18, 37, 39, 45, 77, 82, 86, 160, 165
Gödel, 16, 18, 50, 66, 68, 76, 82, 86, 117 y s., 131, 136, 160 y ss., 186
Hasse, 178
Herbrand, 117
Heyting, 16, 39
Hilbert, 6 y ss., 161 y ss., 202
Kant, 13
Kleene, 118, 122, 135
Klein, 9
Lambert, 9
Lefschetz, 191, 201
Leibniz, 36
Lobačevskij, 9
Lorenzen, 20, 39, 169
Łukasiewicz, 106, 118
Markov, 118
Mostowski, 180
Peano, 14, 18, 61, 67, 69, 74, 77
Poincaré, 12
Post, 118
Robinson, A., 189
Robinson, J., 178
Robinson, R. M., 18, 140
Rolle, 200
Rosser, 118, 148
Russell, 11
Saccheri, 9
Schütte, 19, 83, 86, 89
Skolem, 76, 187
Sturm, 193 y ss.
Szmielew, 177
Tarski, 11, 16 y ss., 118, 166, 171, 177 y s., 180, 191, 193, 196, 201 y ss.
Taylor, 194
Turing, 118
Weierstrass, 11
Weil, 163
Weyl, 12
Zermelo, 12

INDICE DE MATERIAS

Abstracción, 55
Adición, 64
Adjunción, 21, 26
  — infinita, 27
Adjuntiva, fórmula —, 45, 79
Admisibilidad
  — de la regla de transitividad, 92, 95 ss.
  — de las inversiones, 95
Admisible, 45, 48
Alfabeto, 107, 110
Análisis clásico, 11
Anillo conmutativo, 177
  — totalmente ordenado, 179
Antecedente, 45, 88
  sucesión de -s, 89
Aplicaciones, 60
Argumento, 61
Aritmética
  — axiomática, 16, 67
  — clásica, 67, 77 y ss.
  — constructiva, 16, 67
Aritméticamente
  — enumerable, 132
  — expresable, 123
  — representable, 122, 140
  — verdadero, 66
Aritmetización
  — de los formalismos, 105 y ss.
Aritmetizar, 132
Atenuación, 94
Axiomatizable
  — de manera decidible, 155
  — de manera finita, 155
Axiomatización, 67, 68
Axioma, 68 y ss.
  — de Arquímedes, 201
  — de igualdad, 53, 140
  — de Robinson, 140
  sistema de -s, 167
  sistema completo de -s, 68
Bicondicional, 52
Cálculo, 15
  — de implicaciones, 23, 24
  — lógico, 15, 36, 49
  — codificado, 117
Calculable, 121
  elementalmente —, 122
Característica, 188
Cifra, 63, 66
Compatibilidad, 57
Comparatividad, 54
Completitud, 156
  — de la aritmética, 75, 86, 92
  — del cálculo clásico de yuntores, 45 ss.
  — efectiva, 186
  teorema de —, 168
Concepto, 58
Conclusión, 40
Condicional clásico, 23
  — constructivo, 30
Conjuntos, 59
  functor para los —, 60
  — representables, 122
  teoría axiomática de —, 12, 19, 187
  teoría constructiva de —, 12
Conmutatividad, 72
Consecuente, 45
Consistencia, 9 y ss., 77 y ss.
  — del formalismo de Peano, 92 y ss.
  prueba de la —, 50, 92, 162
  sentido de la —, 104
  ω—, 92, 149 y ss.
Constantes, 32, 101
Continuidad, axioma de —, 201
Contraposición, 71 y ss.
Conjunción, 21
  — de base, 185
  — infinita, 27
Cuantificador, 32
  eliminación de -es, 183
  existencial, 72
  lógica clásica de -es, 49, 99
  lógica constructiva de -es, 39
  — universal, 72, 83, 133
  — restringido, 133
Cuerpo, 178
  — algebraico cerrado, 191
  — real cerrado, 191
Decidible, 119
  elementalmente —, 124, 129
Decisión, procedimiento de —, 20, 119, 165, 172

  problema de la —, 165
Deducción, teorema de la, 41, 81
Definido
  d —, 21
  p —, 26 y ss., 71
  v —, 20
Definición
  — fundada, 87
  — inductiva, 64
Demostración, 24
Densidad, 179
Derivabilidad
  — condición de, 162
Derivable, 155
  — absolutamente, 41
  — relativamente, 41
Derivación, 124
Descriptor, 61
Diálogo, 27
  estado de un —, 37
Dominio de integridad, 177
Dualidad, 45
Enumerable, 119, 149
Equivalencia, 23
Estrategia, contra —, 90
  — de ganancia, 28, 34 y ss.
Estructura, 167
Expresabilidad
  — aritmética, 123, 130
  — aritmética normal, 135
  — normal, 138
Expresable
  — en sentido restringido, 133
Extensión, 153
  — conservante, 154
  — consistente, 47-48
  — del mismo ámbito expresivo, 154
  — finita, 155
  — impropia, 154
Extensional, 163
Figura, 167
Forma normal, 124
  — prenexa, 184
Formas proposicionales, 22, 33
  — aritméticas, 27
  — compatibles, 56
  — lógicamente verdaderas, 15, 21 ss.
Formalmente real, 191
Formalismo
  — de Peano, 81
  — de Robinson, 140
  — incompleto, 158
  — completo, 83, 105, 156
Formalismos
  — equivalentes, 155
  — aritméticos, 152, 183
  — universales, 131
Formalización de la aritmética, 76, 105 ss.
Fórmulas, 22, 32, 79, 111
  — restringidas, 135
  — características, 176
  — cerradas, 32
  — consecuentes, 31
Fracción, 55
Funciones, 61
  — proposicionales, 21
  — características, 136
  — de verdad, 21
β-funció, 136
  — precedesora, 137
Functor, 106
Grupo conmutativo, 177
Igualdad
  — abstracta, 57 y ss.
  — aritmética, 186
  — parcial, 57
  — total, 57
  — de cifras, 53, 63
Implicación
  — aritmética, 77
  — válida de manera constructiva, 43
  — lógica constructiva, 42
  — básica, 43, 83
  — lógica clásica, 23, 78, 99, 153
  — crítica, 89, 170
  — material, 23
  — primitiva, 46, 89
Inclusión, 60
Incompletitud
  — efectiva, 158
  teorema de, 66, 76, 117, 158 y ss.
  ω—, 160
Indecibilidad, 118, 122, 176
  — del cálculo de cuantificadores, 156
  — esencial, 155
Inducción
  axioma de —, 74, 102
  — infinita, 83
Infinitud, 63
Interpretación, 22, 168
Inversión, 96
Isomorfismo, 75, 168
Isonomía, 187
Letra, 108
Lógica
  — clásica, 16, 77
  — clásica de yuntores, 23, 45
  — constructiva, 16, 77

— constructiva, de yuntores, 44
— formal, 23
— intuicionista, 39
l—verdadero
clásicamente —, 22
constructivamente —, 26
Máquinas, 118
Matemática abstracta, 167
Metalenguaje, 82
Metanivel, 52
Metarregla, 52
Modelo, 22, 168
— abstracto, 168
— de igualdad lógica, 186
Monomorfía, 75, 187
Multiplicación, 64
Negación, 21, 28, 31
Nivel
— inferior, 52
— objetual, 52
Número
— cardinal, 188
— de paso, 85
— ordinal, 85
— ordinal transfinito, 85
Números
— algebraicos, 188
— amigos, 29
— naturales, 69
— racionales, 55
— algebraicos reales, 191
— enteros, 24
símbolos de —, 53
Objeto
— abstracto, 55
lenguaje —, 74
variable de —, 32, 69
Operativo, 39
Oponente, 28
Orden
axioma de —, 179
— total, 179
Palabra, 108, 110
Partícula lógica, 17, 33 y ss.
Peano
sistema de axiomas de —, 69
sistema de —, 75
sistema restringido de —, 76
Polimorfía, 187
Polinomio derivado, 190, 193
Portador de una estructura, 167
Predicado, 111
Prefijo, 184
Premisa, 38
inducción de -s, 96 y ss
Proponente, 28
Proposiciones aritméticas, 20, 32, 63 ss.
— aritméticas elementales, 191
— primitivas, 21
Recursivo, primitivamente, 122
Reflexividad, 54, 95; clase de —, 57
Regla, 38
Relator, 110
Relación
β —, 136
— complementaria, 129
— de pertenencia, 59 ∈
— de divisibilidad, 133
— unívoca a la derecha, 60
Relativización, 175
Representabilidad, 122, 140 y ss.
— fiel para la negación, 143
Secuencia fundamental, 37
Secuencial, cálculo, 39
Semántica, 50, 87
Seminanillo, 172
Semiformalismo, 105
— aritmético, 83, 99, 149
— semántico, 87
Simetría, 54
Sistema formal completo, 117
Subformalismo, 154
Sustitución, 112
Tabla, 28; sub —, 34
Término, 60, 69, 78, 110
Teoría elemental, 172
Tipo, 168
Traducción, 174
— conservante, 180
— consistente, 176
Transitividad
— de la igualdad, 54
— de la implicación lógica, 78
— para enunciados atómicos, 102
Valor de una función, 61
Variable
condición de -s, 48, 80, 81
— libre, 32, 112
— libre para un término, 80, 112
— ligada, 80
— sintáctica, 22
Verdad
— aritmética, 66
definición semántica de la — 86-87
función de —, 21
— lógica, 22 y ss.
— lógica constructiva, 30
tablas de —, 21
valor de —, 20
Yuntor, 21

enfocados —al nivel de actualidad que garantiza la reciente fecha de publicación de la obra— desde su peculiar posición *operativa* y *constructiva* (sistematizada en 1955 en su *Einführung in die operative Logik und Mathematik*), en la que, desde un planteamiento de raíz intuicionista, se aprovechan —dando así una inflexión nueva a una vieja polémica— elementos de la otra gran tendencia de la actual filosofía de la matemática.

Mención especial merece la presentación *dialógica* de muchas de sus argumentaciones. El curso de éstas se asimila a un diálogo en el que, de acuerdo con unas reglas perfectamente fijadas, oponente y proponente se enfrentan, ofreciendo así, en su búsqueda de una estrategia de ganancia, un auténtico modelo de *prueba* rigurosa y, en definitiva, de método lógico.

Dada la escasísima bibliografía española sobre estas cuestiones, la versión de esta obra rigurosa y excelente viene a poner un calificado instrumento de trabajo en manos de un público de estudiosos, cuyo creciente interés por la lógica matemática y la filosofía de la ciencia es indicio más que suficiente del gran cambio que se está produciendo en estos últimos tiempos en el panorama filosófico español.